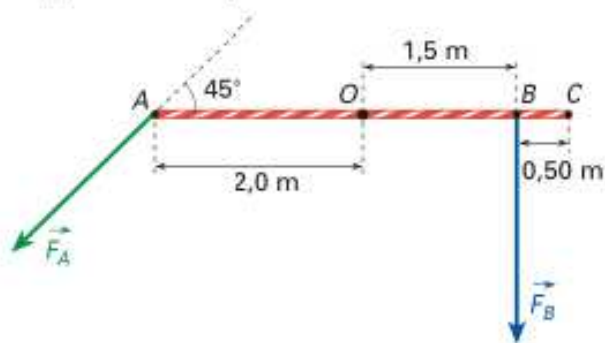


## ➤ Problemi

La risoluzione dei problemi richiede la conoscenza degli argomenti trasversali a più paragrafi. Con il pallino sono contrassegnati i problemi che presentano una maggiore complessità.

- 1 Su un'asta lunga 4 m e vincolata in O sono applicate due forze  $\vec{F}_A$  ed  $\vec{F}_B$  di modulo rispettivamente 50 N e 57 N come rappresentato in figura.



- a) Determina il momento di  $\vec{F}_A$  rispetto al punto O.  
b) Affinché sia in equilibrio l'asta, quale forza occorre applicare perpendicolarmente all'asta in C? Quale verso deve avere tale forza?

**SUGGERIMENTO** Se la forza provoca una rotazione in senso orario il momento ha segno negativo, altrimenti è positivo, per cui il momento di  $\vec{F}_A$  rispetto a O è negativo mentre il momento di  $\vec{F}_B$  rispetto a O è...

[a) 71 N·m; b) 7,4 N diretta verso l'alto]

Calcoliamo il momento di  $F_A$  :

$$M_A = F_A r_A \sin 45^\circ = 50(2) \sin 45 = 70,7 Nm \quad (\text{il verso di } M_A \text{ è positivo})$$

$$M_B = F_B b_B = 57(1,5) = 85,5 Nm \quad (\text{il verso di } M_B \text{ è negativo})$$

La risultante dei due momenti:  $M_{AB} = M_A - M_B = 70,7 - 85,5 = -14,8 Nm$

quindi il sistema tende a ruotare in verso orario:

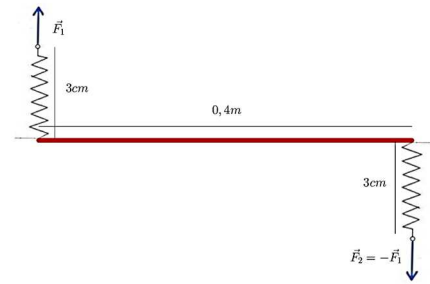
Affinché ci sia equilibrio con una Forza  $F_C$  nel punto C, con verso, verso l'alto:

$$M_C + M_A - M_B = 0 \Rightarrow M_C = M_B - M_A \Rightarrow$$

$$b_C F_C = M_B - M_A \Rightarrow F_C = \frac{M_B - M_A}{b_C} = \frac{14,8}{2} = 7,4 N$$

- 2** Un asse rigido, che può ruotare attorno al proprio centro, è collegato ai suoi due estremi con due molle uguali che agiscono in verso opposto l'una rispetto all'altra. La loro costante elastica è pari a 45 N/m. L'asse ha una lunghezza di 40 cm e viene ruotato in modo tale che le molle si allungino entrambe di 3 cm, risultando parallele tra loro e perpendicolari all'asse. Calcola la coppia che agisce su di esso a causa dell'azione della forza di richiamo delle molle.

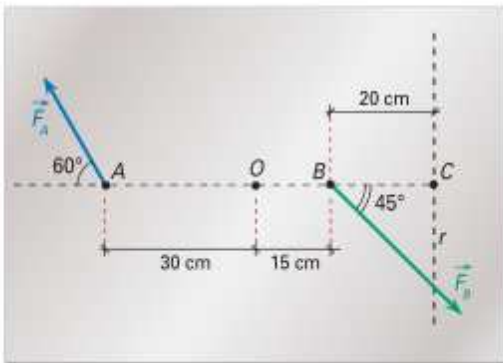
[0,54 N · m]



Il momento della coppia è:

$$M = bF = b(k\Delta s) = 0,4(45)(0,03) = 0,54 Nm$$

- 3** Una lamina metallica di forma rettangolare è vincolata a un asse fisso perpendicolare al piano della lamina e passante per il punto  $O$  (di intersezione delle diagonali). Su di essa, come evidenziato in figura, agiscono  $F_A = 25$  N ed  $F_B = 38$  N.



- Quali sono modulo e verso del momento  $\vec{M}_A$  di  $\vec{F}_A$  rispetto a  $O$ ?
- Quali sono modulo e verso del momento  $\vec{M}_B$  di  $\vec{F}_B$  rispetto a  $O$ ?
- Si deve applicare una forza  $\vec{F}_C$  che agisca lungo la retta d'azione  $r$  in modo che il momento risultante sulla lamina rispetto a  $O$  risulti nullo. Quali sono modulo e verso di  $\vec{F}_C$ ?

[a) 6,5 N m; rotazione oraria...;  
b) 4,0 N m; ....; c) 30 N; ....]

$$M_A = F_A r_A \sin 60^\circ = 25(0,3) \sin 60 = 6,5 Nm \quad (\text{il verso di } M_A \text{ è Negativo})$$

$$M_B = F_B r_B \sin 45 = 38(0,15) \sin 45 = 4,0 Nm \quad (\text{il verso di } M_B \text{ è negativo})$$

$$\text{La risultante dei due momenti: } M_{AB} = -M_A - M_B = -6,5 - 4,0 = -10,5 Nm$$

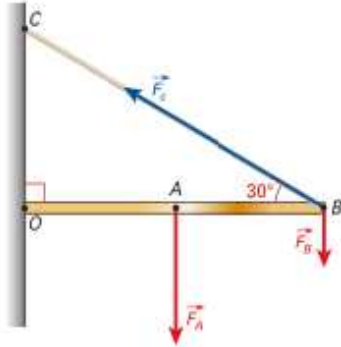
quindi il sistema tende a ruotare in verso orario:

Affinchè ci sia equilibrio con una Forza  $F_C$  nel punto  $C$ , con verso, verso l'alto:

$$M_C - M_A - M_B = 0 \Rightarrow M_C = M_B + M_A \Rightarrow$$

$$b_C F_C = M_B + M_A \Rightarrow F_C = \frac{M_B + M_A}{b_C} = \frac{10,5}{0,35} = 30 N$$

- 4 Arianna, che ha organizzato una festa a sorpresa, ha appeso a una mensola  $OB$  (di massa trascurabile e lunghezza 90 cm) due pacchetti contenenti regali per la festeggiata. Il primo di massa 1,8 kg è appeso in  $A$ , punto medio di  $OB$ , il secondo di massa 0,7 kg è appeso in  $B$ . Per fare in modo che la mensola sia in equilibrio l'ha assicurata con una fune come rappresentato nella figura.



- a) Qual è il modulo del momento  $\vec{M}_A$  di  $\vec{F}_A$  rispetto a  $O$ ?  
 b) Qual è il modulo del momento  $\vec{M}_B$  di  $\vec{F}_B$  rispetto a  $O$ ?  
 c) Se il sistema ha, rispetto a  $O$ , momento risultante nullo, qual è la forza esercitata dalla fune?

[a) 7,9 N·m; b) 6,2 N·m; c) 31 N]

$$M_A = F_A b_A = m_A g b_A = (1,8)(9,8)(0,45) = 7,9 Nm \quad (\text{il verso di } M_A \text{ è Negativo})$$

$$M_B = F_B b_B = m_B g b_B = 0,7(9,8)(0,9) = 6,2 Nm \quad (\text{il verso di } M_B \text{ è negativo})$$

$$\text{La risultante dei due momenti: } M_{AB} = -M_A - M_B = -14,1 Nm$$

Affinchè ci sia equilibrio :

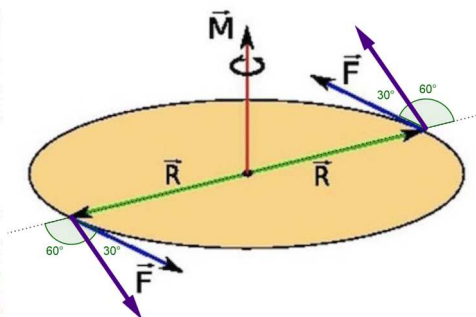
$$M_C - M_A - M_B = 0 \Rightarrow M_C = M_B + M_A \Rightarrow$$

$$r_C F_C \sin 30^\circ = M_B + M_A \Rightarrow F_C = \frac{M_B + M_A}{r_C \sin 30^\circ} = \frac{14,1}{0,9 \sin 30^\circ} = 31,3 N$$

- 5 Un appassionato di musica che colleziona dischi di vinile dal diametro di 30 cm ama farli ruotare sul piatto esercitando con gli indici su due punti diametralmente opposti del bordo due forze uguali, entrambe tangenti al bordo, ma di verso opposto. Sapendo che il momento è 0,20 N·m:

- a) determina la forza applicata.  
 b) Quale sarebbe la forza applicata se le due forze fossero parallele, ma inclinate in modo da formare un angolo di  $30^\circ$  rispetto alla perpendicolare al diametro del disco?

[a) 0,67 N; b) 1,3 N]



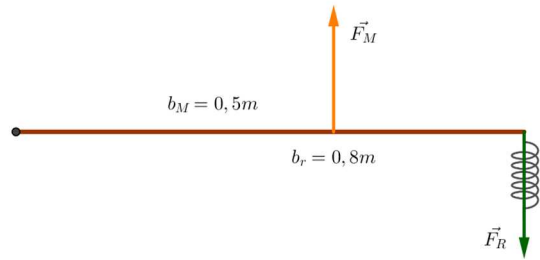
Il momento della coppia è:

$$M = bF \Rightarrow F = \frac{M}{b} = \frac{0,2}{0,3} = 0,67 Nm$$

$$M = bF \sin 60 \Rightarrow F = \frac{M}{b \sin 60} = \frac{0,2}{0,3(\sin 60)} = 0,77 Nm$$

- 6 Una leva di terzo genere, orizzontale, lunga 80 cm è collegata all'estremo libero (cioè quello senza fulcro) con una molla, che tira l'estremo verso il basso verticalmente, con una costante elastica di 175 N/m. A una distanza di 50 cm dal fulcro agisce una forza motrice verticale diretta verso l'alto pari a 70 N. Di quanto si allunga all'equilibrio la molla?

[25 cm]



All'equilibrio:

$$M_R = M_M \Rightarrow$$

$$b_R F_R = b_M F_M \Rightarrow$$

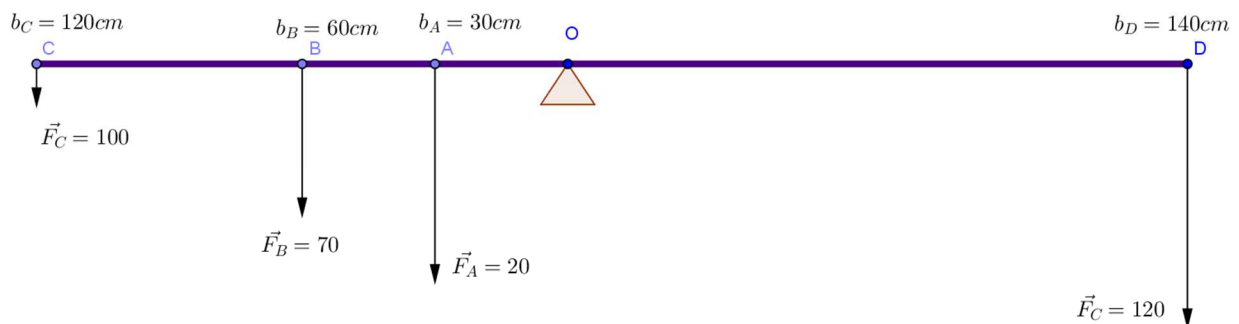
$$b_R (k \Delta s) = b_M F_M \Rightarrow$$

$$\Delta s = \frac{b_M F_M}{b_R k} = \frac{0,5(70)}{0,8(175)} = 0,25m = 25cm$$

- 7 Una leva di primo genere lunga 3,20 m ha il fulcro nel punto medio. Da una stessa parte rispetto a esso sono applicate le forze di 20 N, 70 N, 100 N con bracci, rispettivamente, di 30 cm, 60 cm, 120 cm. Quale forza occorre applicare con bracci di 1,40 m, ma disposta dalla parte opposta rispetto alle precedenti, per equilibrare la leva?

**SUGGERIMENTO** La condizione di equilibrio di una leva, che è basata sull'uguaglianza dei momenti rispetto al punto fisso detto fulcro, può essere generalizzata...

[120 N]



All'equilibrio la somma dei momenti deve essere nulla: (necessariamente il momento di D è negativo)

$$M_A + M_B + M_C - M_D = 0 \Rightarrow M_D = M_A + M_B + M_C \Rightarrow$$

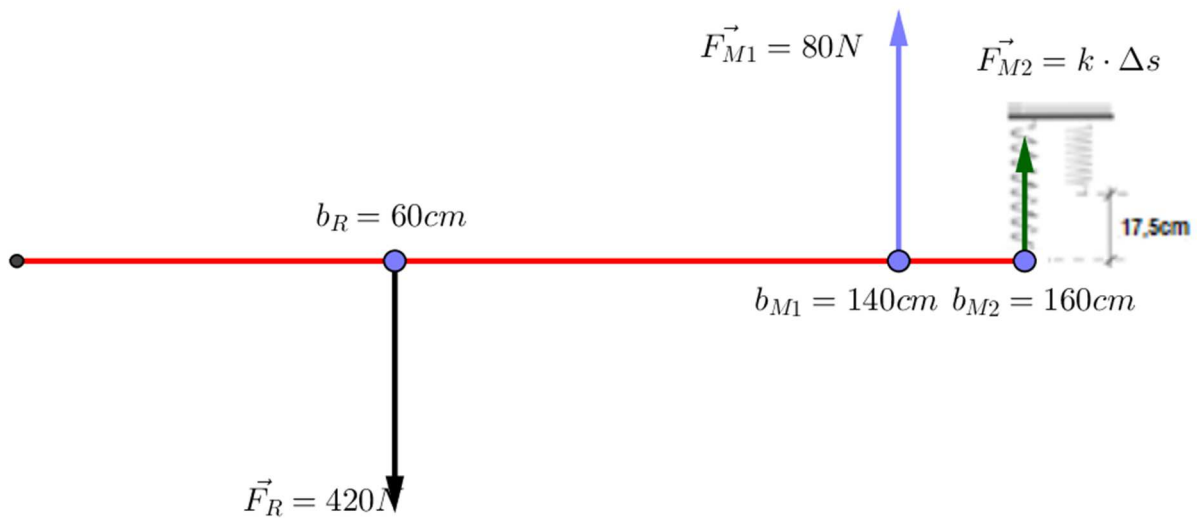
$$x_D F_D = x_A F_A + x_B F_B + x_C F_C \Rightarrow$$

$$F_D = \frac{x_A F_A + x_B F_B + x_C F_C}{x_D} = \frac{0,3(20) + 0,6(70) + 1,2(100)}{1,4} = 120N$$

- 8 Una leva di secondo genere lunga 1,60 m è collegata all'estremo libero (cioè quello senza fulcro) con una molla che solleva l'estremo verso l'alto allungandosi di 17,5 cm. A distanza di 60 cm dal fulcro agisce una resistenza di 420 N diretta verso il basso e a distanza di 1,40 m dal fulcro agisce una forza motrice di 80 N diretta verso l'alto. Sapendo che tutte le forze sono perpendicolari rispetto alla leva, determina la costante elastica della molla all'equilibrio.

**SUGGERIMENTO** La condizione di equilibrio di una leva, che è basata sull'uguaglianza dei momenti rispetto al fulcro, può essere generalizzata. In particolare il momento della resistenza uguaglia la somma dei momenti della forza motrice e della forza che allunga la molla...

[500 N/m]



All'equilibrio:

$$M_{M1} + M_{M2} + M_R = 0 \Rightarrow$$

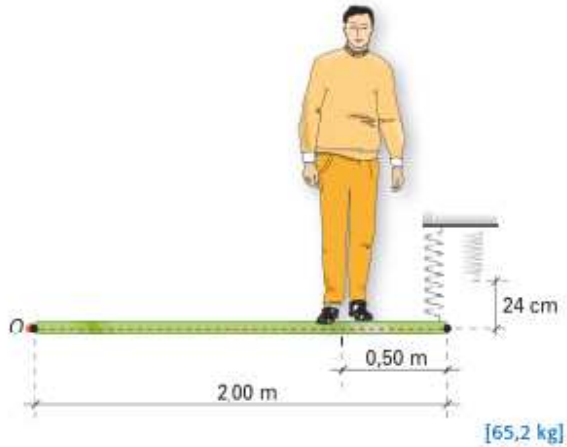
$$b_R F_R - b_{M1} F_{M1} - b_{M2} F_{M2} = 0 \Rightarrow$$

$$b_{M2} F_{M2} = b_R F_R - b_{M1} F_{M1} \Rightarrow$$

$$b_{M2} (k \Delta s) = b_R F_R - b_{M1} F_{M1} \Rightarrow$$

$$k = \frac{b_R F_R - b_{M1} F_{M1}}{b_{M2} (\Delta s)} = \frac{420(0,6) - (1,4)(80)}{1,6(0,175)} = 500 \text{ N / m}$$

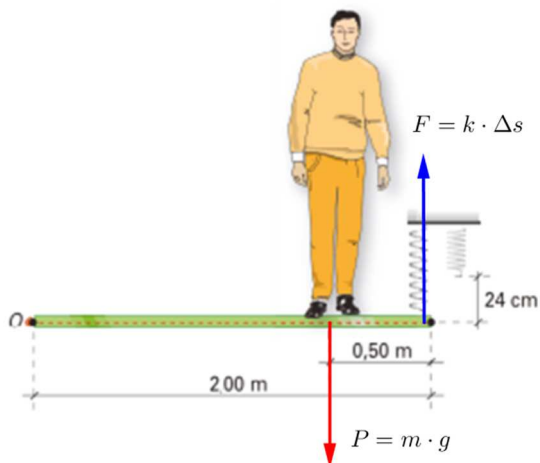
- 9 Una tavola di legno, lunga 2,00 m e di massa trascurabile, è fissata a un estremo, attorno al quale è libera di ruotare. All'altra estremità è agganciata a una grossa molla che ha costante elastica pari a 2000 N/m. La tavola si dispone orizzontalmente quando una persona si trova a 0,50 m dalla molla. Supponendo che quest'ultima si sia allungata di 24 cm, trova la massa della persona.



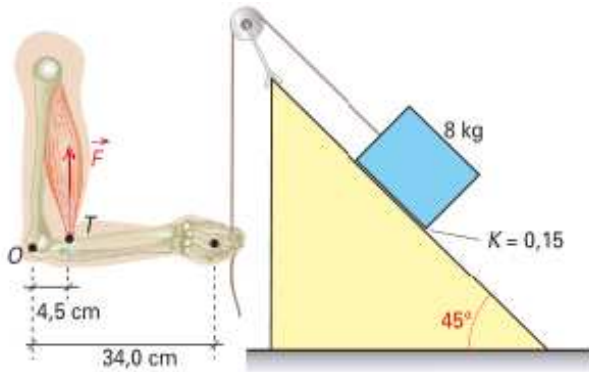
All'equilibrio: (agiscono due forze il peso e la forza elastica).

$$-M_1 + M_2 = 0 \Rightarrow -b_1 F_1 + b_2 F_2 = 0 \Rightarrow b_1 F_1 = b_2 F_2 \Rightarrow b_1 m g = b_2 k \Delta s \Rightarrow$$

$$m = \frac{b_2 k \Delta s}{b_1 g} = \frac{2(2000)0,24}{1,5(9,8)} = 65,3 \text{ kg}$$



- 10 Nella posizione indicata in figura il braccio ruota attorno al punto fisso  $O$ , mentre la mano tira verticalmente verso il basso la fune a cui, tramite la carrucola, è agganciato il blocco di 8 kg. Il blocco è appoggiato su un piano inclinato a  $45^\circ$  e tra di esso e la superficie vi è un coefficiente di attrito statico di 0,15. Sapendo che il blocco è sul punto di iniziare a muoversi verso l'alto, trova la forza  $\vec{F}$  che sollecita il bicipite nel punto  $T$ .



**SUGGERIMENTO** La carrucola fissa serve solo per modificare la direzione della forza; tieni presente che la forza d'attrito ha verso opposto a quello del movimento.

[482 N]

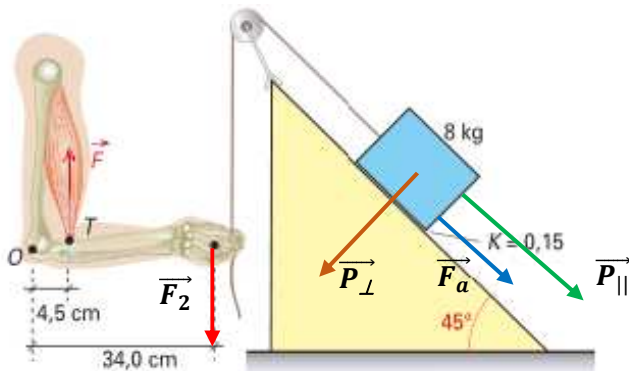
All'equilibrio, la somma dei due momenti è nulla. Agiscono due forze la forza motrice  $F_1$  del braccio e la forza Resistente  $F_2$  del peso sul piano inclinato.

La forze resistente  $F_2$  è data dalla somma della forza di attrito e della forza parallela:

$$F_2 = F_a + P_{\parallel} = kP_{\perp} + P_{\parallel} = kmg \cos 45 + mg \sin 45 = (0,15)(8)(9,8) \cos 45 + 8(9,8) \sin 45 = 63,75 \text{ N}$$

$$M_1 - M_2 = 0 \Rightarrow b_1 F_1 - b_2 F_2 = 0 \Rightarrow b_1 F_1 = b_2 F_2 \Rightarrow b_1 F_1 = b_2 F_2 \Rightarrow$$

$$F_1 = \frac{b_2 F_2}{b_1} = \frac{(0,34)(63,75)}{0,045} = 482 \text{ N}$$





**11** Si hanno due forze  $\vec{F}_1$  ed  $\vec{F}_2$  che, in relazione allo stesso centro di rotazione  $O$ , hanno bracci rispettivamente  $b_1$  e  $b_2$ . Si sa che i moduli delle due forze e i bracci sono i seguenti:

$$F_1 = (15,6 \pm 0,2) \text{ N} \quad b_1 = (4,5 \pm 0,1) \text{ cm}$$

$$F_2 = (9,8 \pm 0,1) \text{ N} \quad b_2 = (6,3 \pm 0,1) \text{ cm}$$

Scrivi il risultato del modulo del momento risultante, dato da  $M = M_1 + M_2$ , essendo  $M_1$  ed  $M_2$  i moduli dei momenti delle due forze.

$$[(1,32 \pm 0,05) \text{ N} \cdot \text{m}]$$

$$M = M_1 + M_2 = 0 \Rightarrow M = b_1 F_1 + b_2 F_2 = (15,6)0,045 + (9,8)0,063 = 1,32 \text{ Nm}$$

$$M_1 = b_1 F_1 = (0,045)15,6 = 0,70 \text{ Nm}$$

$$\Delta M_1 = M_1 \left( \frac{\Delta b_1}{b_1} + \frac{\Delta F_1}{F_1} \right) = 0,7 \left( \frac{0,001}{0,045} + \frac{0,2}{15,6} \right) = 0,025 \text{ Nm}$$

$$M_2 = b_2 F_2 = (0,063)9,8 = 0,62 \text{ Nm}$$

$$\Delta M_2 = M_2 \left( \frac{\Delta b_2}{b_2} + \frac{\Delta F_2}{F_2} \right) = 0,62 \left( \frac{0,001}{0,063} + \frac{0,1}{9,8} \right) = 0,016 \text{ Nm}$$

$$\Rightarrow \Delta M = \Delta M_1 + \Delta M_2 = 0,025 + 0,016 = 0,041 = 0,05$$

$$M = (1,32 \pm 0,05) \text{ Nm}$$

**12** Su un'altalena a bilico orizzontale due bambini si trovano a distanza di  $(1,30 \pm 0,05) \text{ m}$  e  $(0,95 \pm 0,05) \text{ m}$  rispettivamente dal fulcro. Sapendo che la massa del primo bambino è pari a  $(28,8 \pm 0,2) \text{ kg}$ , trova il peso del secondo bambino, giungendo alla scrittura completa del risultato.

**SUGGERIMENTO** Ti serve, per trovare il peso del primo bambino, il valore della costante  $g$ ; esso è  $(\dots \pm 0,01) \text{ m/s}^2$ ...

$$[(390 \pm 40) \text{ N}]$$

$$M_1 = M_2 \Rightarrow b_1 F_1 = b_2 F_2 \Rightarrow F_2 = \frac{b_1 F_1}{b_2} \Rightarrow F_2 = \frac{b_1 (m_1 g)}{b_2} \Rightarrow$$

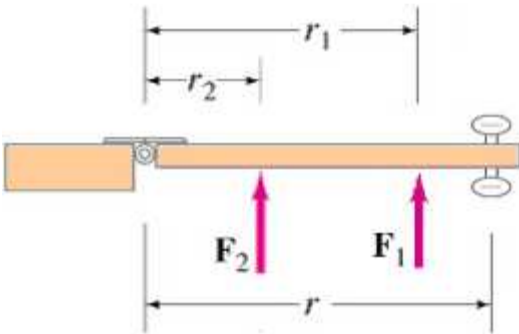
$$F_2 = \frac{b_1 m_1 g}{b_2} = \frac{(1,3)(28,8)(9,8)}{0,95} = 386 \text{ N}$$

$$\Delta F_2 = F_2 \left( \frac{\Delta b_1}{b_1} + \frac{\Delta b_2}{b_2} + \frac{\Delta m_1}{m_1} \right) = 386 \left( \frac{0,05}{1,3} + \frac{0,05}{0,95} + \frac{0,2}{28,8} \right) = 37,8 \text{ N}$$

$$F_2 = (390 \pm 40) \text{ Nm}$$



- 13** A boy is trying to open a door that is 80 cm wide and his force is applied 20 cm from the door-knob. If there is a spring on the door 6.0 cm from the hinges which exerts a force of 50 N to keep the door closed, how much force must be used to open the door? [5,0 N]



Se  $r = 80\text{cm}$  ,  $r_1 = 80 - 20 = 60\text{cm}$  ,  $r_2 = 6\text{cm}$

$$M_2 = M_1 \Rightarrow b_1 F_1 = b_2 F_2 \Rightarrow F_1 = \frac{r_2 F_2}{r_1} = \frac{(6)(50)}{60} = 5\text{N}$$

- 14** A 24.0 kg child is sitting 1.70 m from the pivot on the left side of a see-saw. A 19.0 kg child is sitting 0.75 m away from the pivot on the right side. Calculate the magnitude and direction of the net torque on this system. [260 N · m]

La direzione del momento è perpendicolare all'altalena, e il verso è quella del bambino di 24kg

$$M = M_1 - M_2 \Rightarrow M = b_1 F_1 - b_2 F_2 = b_1 m_1 g - b_2 m_2 g = (1,7)(24)(9,8) - 0,75(19)9,8 = 260,2\text{ Nm}$$

