Intersezione tra retta e parabola:

Per trovare i punti di intersezione tra retta e parabola, metto a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$$

da cui per confronto $ax^2 + bx + c = mx + q$ da cui

$ax^2 + (b-m)x + c - q = 0$ ottengo un'equazione il cui delta è $\Delta = (b-m)^2 - 4a(c-q)$

1) $\Delta > 0$ ho due soluzioni $x_{1,2} = \dfrac{-(b-m) \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ e quindi due punti di intersezione $P(x_1, mx_1 + q)$ e $P(x_2, mx_2 + q)$. La retta in questo caso si dice **secante**

2) $\Delta < 0$ non ho intersezioni e la retta si dice **esterna.**

3) $\Delta = 0$ ho una soluzione coincidente $x_0 = \dfrac{-(b-m)}{2a}$ e quindi un punto di intersezione $P(x_0, mx_0 + q)$. La retta in questo caso si dice **tangente.**

Si può dimostrare che la retta tangente ad una parabola in un suo punto ha coefficiente angolare: $m = 2ax_0 + b$*:*

Dimostrazione: Dato che $\Delta = (b-m)^2 - 4a(c-q) = 0$ ho che $(b-m)^2 = 4a(c-q)$ da cui $(c-q) = \dfrac{(b-m)^2}{4a}$. Che sostituita all'equazione di secondo grado mi da

$ax_0^2 + (b-m)x_0 + \dfrac{(b-m)^2}{4a} = 0$ da cui $4a^2x_0^2 + 4a(b-m)x_0 + (b-m)^2 = 0$ da cui

$(2ax_0 + b - m)^2 = 0$ e quindi $m = 2ax_0 + b$ coefficiente angolare della retta tangente in un punto P della parabola.

Rette tangenti ad una parabola condotte da un punto P:

Se prendo un punto $P(x_0, y_0)$ e voglio trovare le rette tangenti alla parabola:

1) Considero il fascio di rette per P $y - y_0 = m(x - x_0)$ faccio il sistema tra fascio e parabola. E ottengo $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}$ da cui $ax^2 + bx + c = mx - mx_0 + y_0$ e quindi $ax^2 + (b-m)x + c + mx_0 - y_0 = 0$ e ottengo un equazione di secondo grado. Abbiamo già visto che una retta tangente ad una parabola ha il delta uguale a zero, e quindi pongo il delta dell'equazione uguale a zero:

$\Delta = 0$ ovvero $\Delta = (b-m)^2 - 4a(c - mx_0 + y_0) = 0$ da cui

$b^2 + m^2 - 2mb - 4ac + 4amx_0 + 4ay_0 = 0$ $m^2 - 2(b + 2ax_0)m + b^2 - 4ac + 4ay_0 = 0$ ottengo un equazione di secondo grado e come incognita m .

a) Se P è esterno alla parabola ottengo due rette tangenti.
b) se P appartiene alla parabola ottengo due rette tangenti coincidenti
c) se P è interno alla parabola non ottengo nessuna retta tangente.

Esempi:

Esempio 1:

Data la parabola $y=-x^2+4x$. Classificare le seguenti rette rispetto alla parabola data. $y=x$ $y=4x$ e $y=-4x+16$ e $y=x+4$

Metto a sistema la parabola con le tre rette. Ottenendo tre equazioni di secondo grado

$\begin{cases} y=-x^2+4x \\ y=x \end{cases}$	$\begin{cases} y=-x^2+4x \\ y=-4x+16 \end{cases}$	$\begin{cases} y=-x^2+4x \\ y=x+4 \end{cases}$
$-x^2+4x=x$	$-x^2+4x=-4x+16$	$-x^2+4x=x+4$
$-x^2+3x=0$	$-x^2+8x-16=0$	$-x^2+3x-4=0$
$\Delta=b^2-4ac=9-4\cdot(-1)\cdot 0=9>0$	$\Delta=b^2-4ac=64-4\cdot(-1)\cdot(-16)=0$	$\Delta=9-4\cdot(-1)\cdot(-4)=-7<0$
Secante	**Tangente**	**Esterna**

Esempio 2:

Trovare le rette tangenti alla parabola $y=-x^2+4x$ condotte dal punto $P\left(\frac{5}{2};6\right)$ trovo il fascio di rette per P $y-6=m(x-\frac{5}{2})$, metto ad intersezione fascio e parabola $\begin{cases} y=-x^2+4x \\ y-6=m(x-\frac{5}{2}) \end{cases}$ da cui

$\begin{cases} y=-x^2+4x \\ y=mx-\frac{5}{2}m+6 \end{cases}$ da cui $-x^2+4x=mx-\frac{5}{2}m+6$ da cui (m.c.m e cambio segno)

$2x^2-(8-2m)x-5m+12=0$ Dato che cerco le rette tangenti pongo il delta dell'equazione di secondo grado uguale a zero $\Delta=(8-2m)^2-4\cdot 2(12-5m)=0$ da cui $\Delta=64+4m^2-32m-96+40m=0$ da cui $4m^2+8m-32=0$ semplificando $m^2+2m-8=0$ da cui $m=-1\pm\sqrt{1+8}=\left\langle\begin{matrix} m=2 \\ m=-4 \end{matrix}\right.$ e quindi le due rette richieste sono $y-6=2(x-\frac{5}{2})$ e $y-6=-4(x-\frac{5}{2})$ ovvero le rette $y=2x+1$ e $y=-4x+16$

Esempio 3:

Trovare le rette tangenti alla parabola $y=x^2-4x+3$ condotte dal punto $P(1;0)$.

Come si può verificare il punto P appartiene alla parabola. In questo caso la retta tangente è una sola e per trovare la sua equazione posso procedere come nell'esercizio precedente. (ovvero fascio di rette per P, sistema e poi delta uguale a zero) oppure posso usare la formula della retta tangente $m=2ax_0+b$ da cui $m=2ax_0+b=2\cdot 1-4=-2$ e poi trovando il fascio per P $\begin{cases} y-3=m(x-1) \\ m=-2 \end{cases}$ da cui $y-0=-2(x-1)$ $y=-2x+2$ (retta tangente cercata)