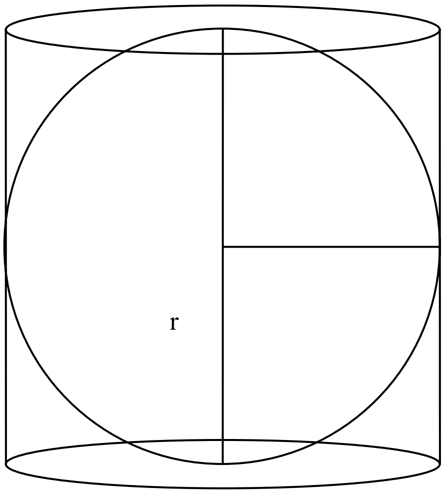
Questionario

Quesito 1

Provare che una sfera è equivalente ai 2/3 del cilindro circoscritto.



Il volume della sfera è $\frac{4}{3}\pi r^3$

Il volume del cilindro è dato dal prodotto della superficie di base per l'altezza, quindi $\pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$.

$$\frac{V_{sfera}}{V_{cilindro}} = \frac{2}{3}$$

Si tratta del celebre risultato ottenuto da Archimede per il calcolo del volume della sfera in rapporto a quello del cilindro. Secondo quanto descritto da Cicerone, questo risultato era stato scolpito sulla tomba del celebre scienziato siracusano: " *Quando ero questore in Sicilia mi misi a cercare la sua tomba invasa dalle erbe e dagli sterpi, che i siracusani non conoscevano e anzi negavano che esistesse. Avevo infatti sentito parlare di alcuni versi incisi sulla tomba che spiegavano perché essa fosse sormontata da una sfera e da un cilindro. Fuori da Porta Agrigentina c'è un gran numero di sepolture, e a forza di cercare e di guardare notai finalmente una piccola colona che a pena superava la boscaglia di sterpi, e su di essa erano raffigurati una sfera e un cilindro*." Marco Tullio Cicerone, Tusculanae Disputationes, V, 23.

www.matematicamente.it\storia\archimede_sfera_cilindro.htm

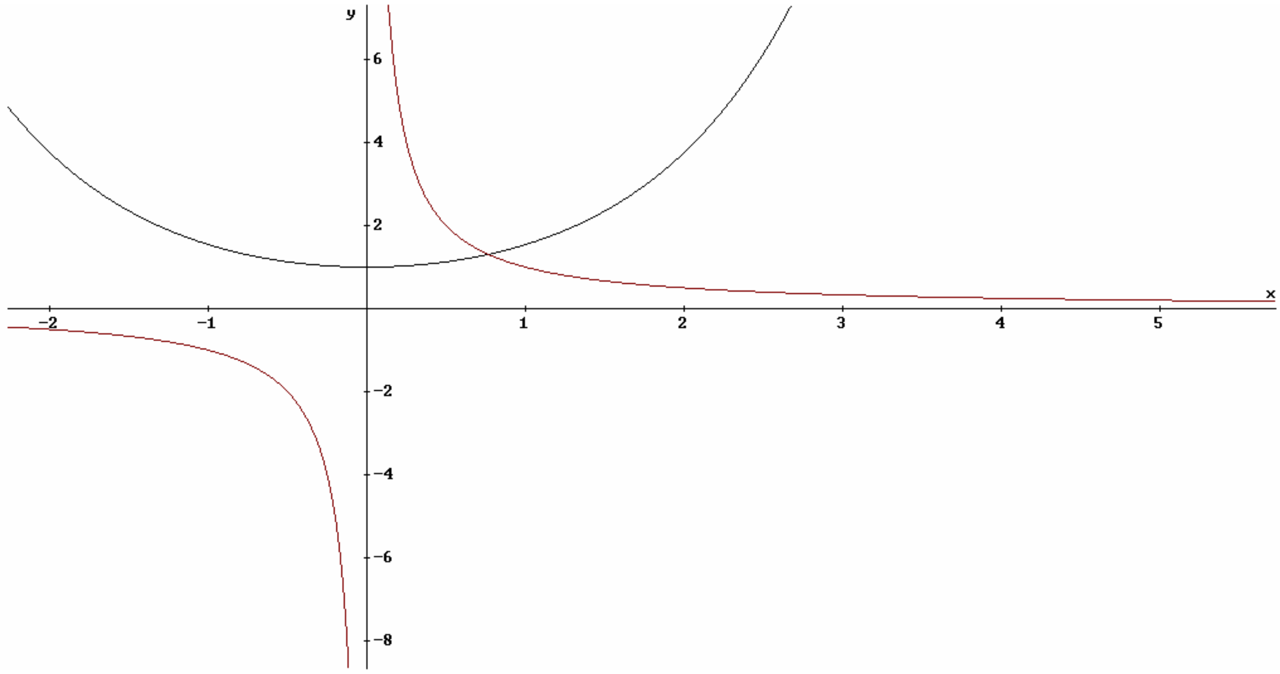
Quesito 2

Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$xe^x + xe^{-x} - 2 = 0$$

L'equazione va risolta graficamente.

$xe^x + xe^{-x} - 2 = 0 \Rightarrow x\left(e^x + e^{-x}\right) = 2 \Rightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{x}$, ricordando la definizione di *coshx*, si ha $\frac{1}{x} = \cosh x$.



Dal grafico si deduce che la soluzione è unica.

Quesito 3

Dimostrare che se p(x) è un polinomio, allora tra due qualsiasi radici distinte di *p(x)* c'è una radice di $p'(x)$.

Siano x_1 e x_2 due radici distinte di p(x), quindi $p(x_1)=p(x_2)=0$. La funzione p(x) soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle:

- è continua in ogni punto dell'intervallo $[x_1,x_2]$;
- è derivabile in (x_1,x_2);
- $p(x_1)=p(x_2)$

di conseguenza esiste $c \in (x_1, x_2)$ per il quale p'(c)=0

Quesito 4

Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la *f(x)?*.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Per un corollario del teorema di Lagrange, la funzione è costante. E' sufficiente calcolare il valore della funzione in un punto: $f(1) = arcsen 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2}$.

Quesito 5

Calcolare l'integrale

$$\int \frac{\log x}{x} dx$$

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \int \log x \cdot (\log x)' dx = \frac{\log^2 x}{2} + k$$

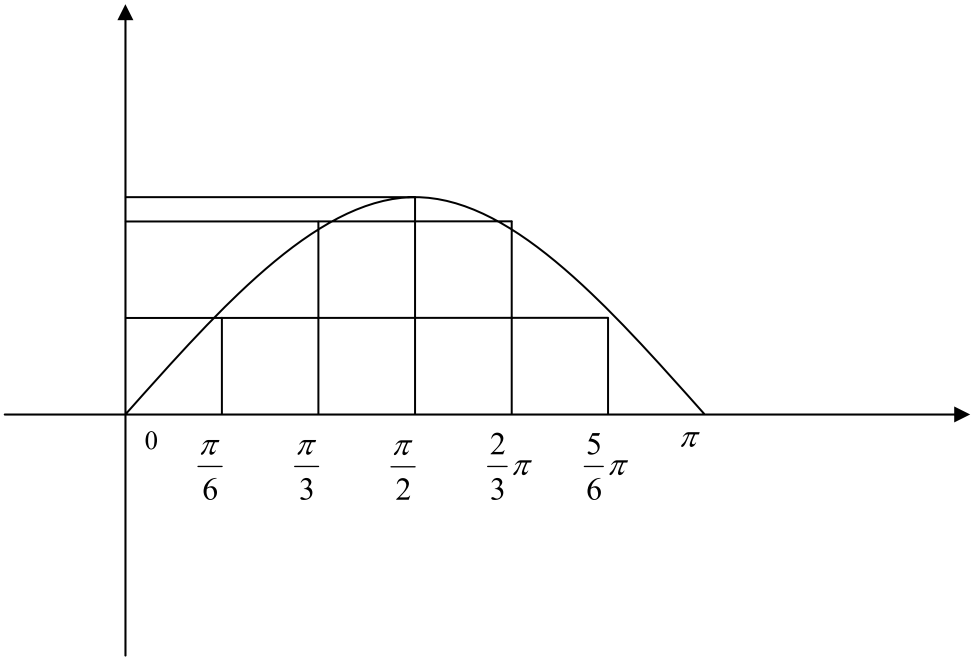
Quesito 6

Con uno dei metodi di quadratura studiati, si calcoli un'approssimazione dell'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$$

e si confronti il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale.

Il valore esatto dell'integrale è $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\left[\cos x\right]_0^{\pi} = 2$.



Con il metodo dei rettangoli si ha

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{n}\left[f\left(x_0\right)+f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+...+f\left(x_{n-1}\right)\right]$$

l'errore è $e \leq \frac{\left(b-a\right)^2}{2n} \cdot M \ con \left|f'(x)\right| \leq M$

Dividendo in 6 parti l'intervallo $\left[0,\pi\right]$ si ha, con il metodo dei rettangoli

$$\int_0^{\pi} senxdx \simeq \frac{\pi}{6}\left(sen0+sen\frac{\pi}{6}+sen\frac{\pi}{3}+sen\frac{\pi}{2}+sen\frac{2}{3}\pi+sen\frac{5}{6}\pi+sen2\pi\right) \simeq 1{,}954 .$$

L'errore è 2-1,954

Quesito 7

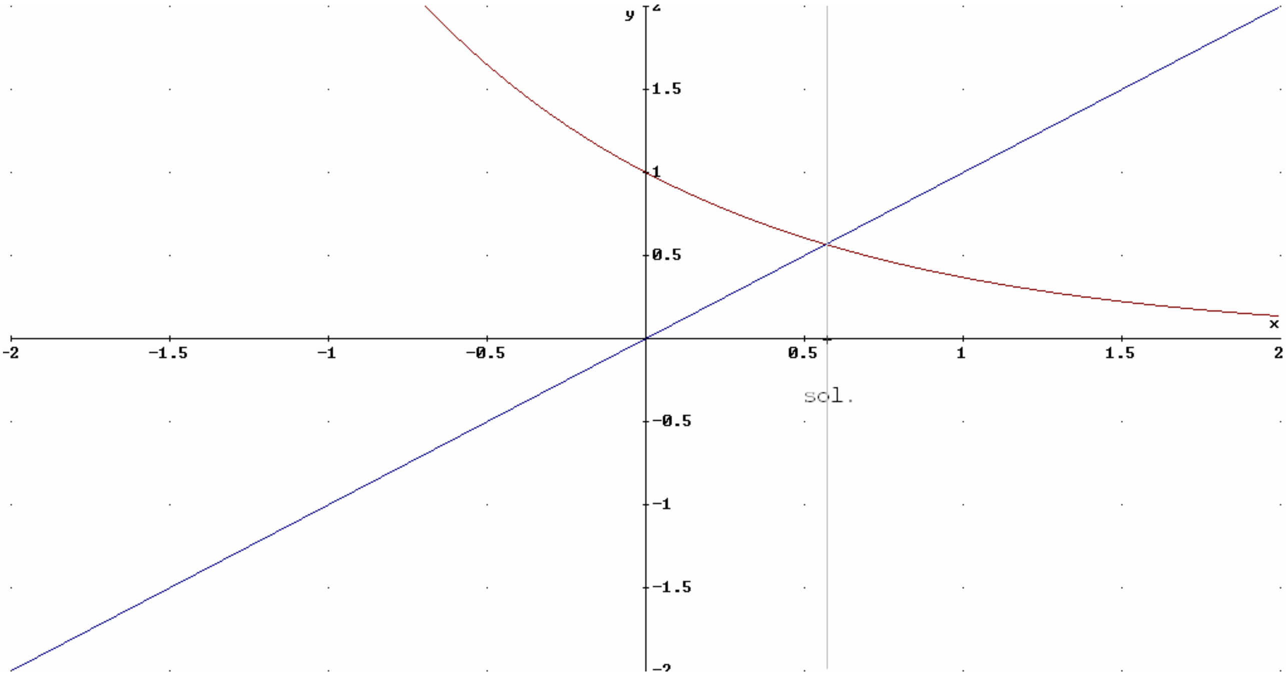
Verificato che l'equazione $x - e^{-x} = 0$ ammette una sola radice positiva compresa tra 0 e 1 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

La funzione y(x)=x-e^{-x} nell'intervallo assegnato [0,1] soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri.

- ✓ y(x) è continua in [0,1]
- ✓ $y\left(0\right) \cdot y\left(1\right) < 0$ (in quanto y(0)=-1<0 e y(1)=1-1/e>0)

Essendo la derivata prima maggiore di zero [$y'(x)= 1+e^{-x}>0$], la funzione è strettamente crescente nell'intervallo [0,1], quindi esiste una sola radice x^* compresa tra 0 e 1.

Risolvendo graficamente il sistema $\begin{cases} y = x \\ y = e^{-x} \end{cases}$ si ha



Utilizzando, per esempio, *il metodo della bisezione* si ha:

x_1	x_2	$y(x_1)$	$y(x_2)$	x^*
0	1	$y(x_1)<0$	$y(x_2)>0$	$0< x^*<1$
0,5	1	$y(x_1)<0$	$y(x_2)>0$	$0,5< x^*<1$
0,5	0,75	$y(x_1)<0$	$y(x_2)>0$	$0,75< x^*<1$

Quindi $0,5< x^*<0,75$

Quesito 8

Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?

Consideriamo l'evento M = "Estrarre a caso un allievo maschio".

Prima estrazione $P(M) = \frac{12}{16}$

Seconda estrazione $P(M) = \frac{11}{15}$

Terza estrazione $P(M) = \frac{10}{14}$

Per il teorema delle probabilità composte la probabilità cercata è $\frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{11}{28} \approx 39\%$.

Utilizzando il calcolo combinatorio $P = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{16}{3}} = \frac{11}{28}$

Quesito 9

Spiegare il significato di *sistema assiomatico* con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria.

Il tema richiede una trattazione piuttosto lunga e complessa. Un'esposizione in poche righe può essere la seguente.

In un sistema assiomatico-deduttivo, dimostrare un teorema significa verificare che esso discende logicamente da un sistema di proposizioni precedentemente dimostrate, le quali a loro volta devono discendere da altre proposizioni. E' evidente che questo procedimento deve necessariamente avere un punto di partenza. Devono quindi esserci un certo numero di proposizioni, dette postulati o assiomi, che devono essere accettate come vere e per le quali non si può richiedere una dimostrazione.

Gli assiomi possono essere scelti in modo arbitrario, devono però essere

- *compatibili*, cioè non si possono dedurre teoremi che se si contraddicono,
- *completi*, cioè dagli assiomi scelti si devono poter dedurre tutti i teoremi del sistema,
- *indipendenti*, cioè nessun assioma può essere dimostrato come conseguenza degli altri assiomi.

Nell'organizzazione logico-deduttiva che Euclide ha dato alla geometria nei suoi *Elementi* (300 a.C.), assiomi e postulati fanno riferimento a fatti intuitivamente evidenti o ad astrazioni di oggetti concreti.

L'assiomatica moderna, che nasce con il libro del 1889 *Fondamenti di Geometria* del matematico tedesco D. Hilbert, la geometria è strutturata come puro calcolo logico che opera su un sistema di assiomi, senza alcun riferimento al significato fisico-geometrico degli assiomi stessi.

All'organizzazione logica della matematica hanno contribuito in modo significativo anche G. Peano, G. Frege e B. Russell.

Quesito 10

Dire, formalizzando la questione e utilizzando il teorema *del valor medio* o di *Lagrange*, se è vero che: «se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la *velocità media* è 60 km/h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60 km/h».

Teorema di Lagrange

Se una funzione f(x) è continua in [a,b] e derivabile in (a,b) ed esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ *per il quale* $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

In riferimento al quesito posto, con l'ipotesi aggiuntiva che la legge oraria del moto s(t) sia continua in $[t_i,t_f]$ e derivabile in (t_i,t_f), dove t_i è l'istante iniziale, t_f l'istante finale, si ha per il teorema di Lagrange, che esiste un istante t_c, per il quale $s'(t_c) = \dfrac{s(t_f)-s(t_i)}{t_f - t_i}$,

dove $s'(t_c)$ è la velocità in un istante t_c del viaggio

$\dfrac{s(t_f)-s(t_i)}{t_f - t_i}$ è la velocità media del viaggio.