Maturità

Sessione suppletiva 1999

<u>M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO</u>

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1. Data una semicirconferenza di centro O e di diametro AB = 2, si assuma su di essa un punto C in modo che l'angolo $A\hat{O}C$ sia acuto. Indicata con φ l'ampiezza di tale angolo, siano:

   $x = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$,

   y = raggio della circonferenza tangente tanto al diametro quanto, nel punto C, alla semicirconferenza.

   Dopo aver dimostrato che il centro di tale circonferenza appartiene al raggio OC, si studi e si rappresenti graficamente la funzione y = f(x) senza tenere conto delle limitazioni di natura geometrica poste ad x dal problema.

2. Si deve costruire un recipiente a forma di cilindro circolare retto che abbia una capacità di $16\pi\ cm^3$. Il candidato determini le dimensioni del recipiente che richiederanno la quantità minima di materiale.

   Verificato che il cilindro cercato è quello equilatero, si determinino la superficie ed il volume della sfera ad esso circoscritta.

   Considerate infine le formule:

   $$V = \frac{4}{3}\pi x^3 \quad e \quad S = \pi x^2$$

   che danno rispettivamente il volume di una sfera di raggio x e l'area di un cerchio sempre di raggio x se ne illustrino i risultati della derivazione rispetto a x.

3. L'informazione che si ha della parabola $f(x) = ax^2 + bx + c$ è tutta concentrata nel punto di ascissa x = 5 ed è:

   $$f(5) = 0, \quad f'(5) = -1 \quad e \quad f''(5) = -\frac{1}{2}$$

- determinata la parabola e detti A e B i suoi punti d’intersezione con l’asse x calcolare l’area del triangolo ABC ove con C si è denotato il punto d’incontro delle tangenti alla parabola in A e in B e stabilire il rapporto tra tale area e quella del segmento parabolico di base AB;

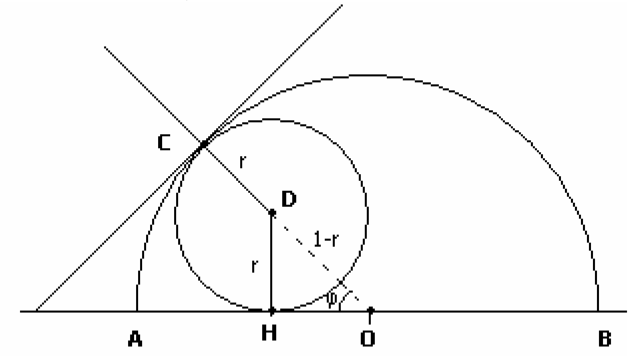
- stabilire altresì il rapporto tra i volumi descritti dalle aree prima considerate per effetto della loro rotazione completa attorno all’asse x.

Durata massima della prova: 5 ore.

E’ consentito l’uso della calcolatrice tascabile non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Problema n,1



Osserviamo che se la Circonferenza 2 deve essere tangente sia in C che al diametro AB abbiamo che La perpendicolare in C passa sia per il centro della Circonferenza 2 D, sia per O (centro di C1).
Questo per il teorema che dice che la perpendicolare alla tangente per il punto di tangenza passa per il centro ed è perpendicolare alla tangente, e coincidente con il raggio.
Se indico Con r il raggio della circonferenza tangente e considero il triangolo rettangolo DHO.
Allora per ho che $r=(1-r)\sin\varphi$ da cui $r=\dfrac{\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$ e tenendo conto delle formule parametriche

ho che $r=\dfrac{\sin\varphi}{1+\sin\varphi}=\dfrac{\dfrac{2tg\frac{\varphi}{2}}{1+tg^2\frac{\varphi}{2}}}{1+\dfrac{2tg\frac{\varphi}{2}}{1+tg^2\frac{\varphi}{2}}}=\dfrac{\dfrac{2tg\frac{\varphi}{2}}{1+tg^2\frac{\varphi}{2}}}{\dfrac{1+tg^2\frac{\varphi}{2}+2tg\frac{\varphi}{2}}{1+tg^2\frac{\varphi}{2}}}=\dfrac{2tg\frac{\varphi}{2}}{1+tg^2\frac{\varphi}{2}+2tg\frac{\varphi}{2}}$ da cui tenendo conto che

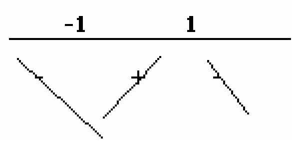
y=r e che $x=tg\dfrac{\varphi}{2}$ abbiamo che

$$y=\frac{2x}{1+x^2+2x}=\frac{2x}{(1+x)^2}$$

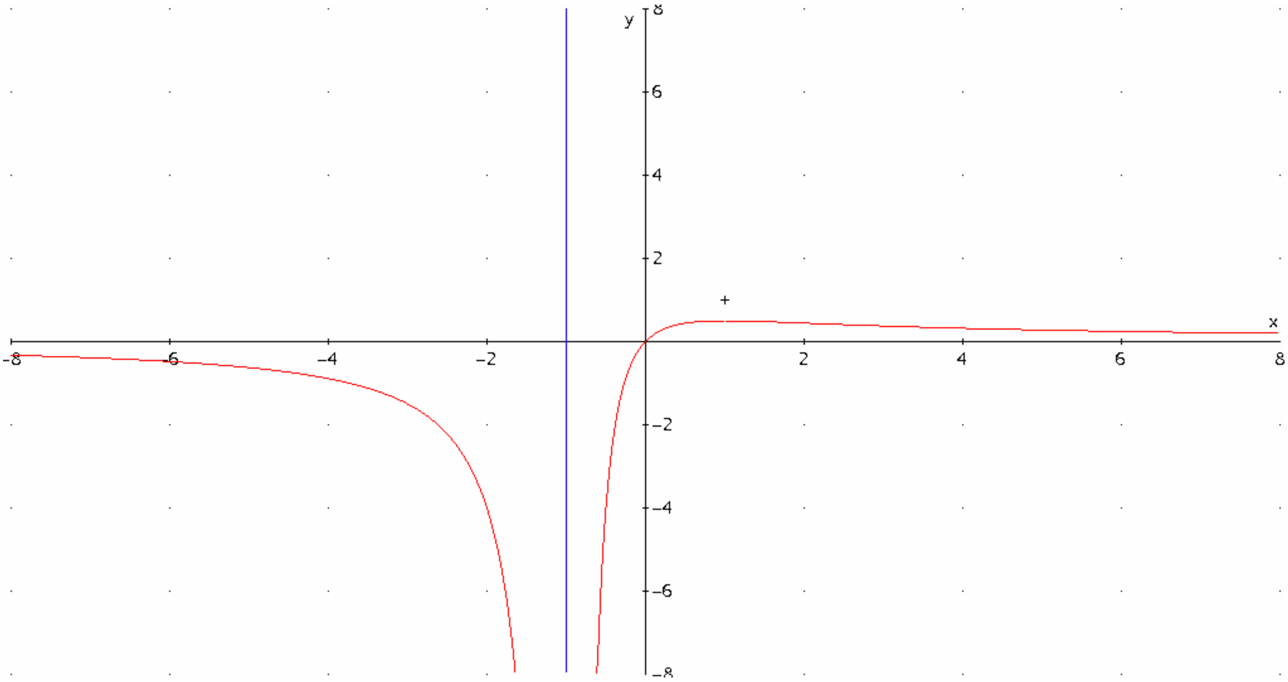
C.E. $x\neq -1$ passa per il O(0,0) e è positiva per x>0 .

Asintoto verticale x=-1. Asintoto orizzontale y=0

$$y' = 2\frac{(1+x)^2 - 2x(x+1)}{(1+x)^2} = 2\frac{(1+x)(1-x)}{(1+x)^2} = 2\frac{(1-x^2)}{(1+x)^2} \geq 0$$



$Max(1, \frac{1}{2})$

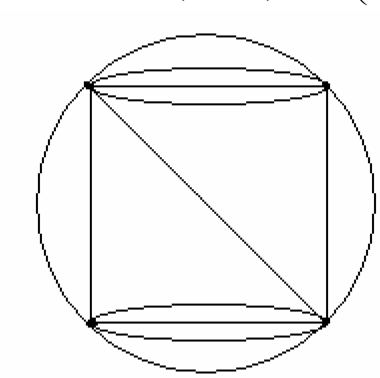


Problema n.2

$V = 16\pi cm^3 = \pi R^2 h$ da cui $16 = R^2 h$ da cui $\frac{16}{R^2} = h$

La superficie totale $Suptot = 2\pi R^2 + 2\pi R \frac{16}{R^2} = 2\pi R^2 + 2\pi \frac{16}{R}$ da cui

$Suptot' = 2\pi\left(1 - \frac{16}{R^2}\right) = 2\pi\left(\frac{R^2 - 16}{R^2}\right) \geq 0$ da cui $R = 2$ e quindi $h = \frac{16}{R^2} = 4$



La sfera circoscritta ha come diametro la diagonale del cilindro da cui $2r = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ da cui $r = 2\sqrt{2}$ $Sup = 4\pi r^2 = 32\pi$

$Volume = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{64}{3}\pi\sqrt{2}$

$Volume = \frac{4}{3}\pi r^3$ derivata ottengo $V' = \frac{4}{3}3\pi r^2 = 4\pi r^2$ ovvero la superficie della sfera.
Se io considero la quantità $4\pi r^2 dr$ e integro le superfici ottengo il volume della sfera.

$S = \pi x^2$ derivata ottengo $C = 2\pi x$ ovvero la lunghezza della circonfenza. In fatti l'area di un cerchio lo posso considerare come l'integrazione di tanti anelli $2\pi x dx$.

Problema n.3

4. L'informazione che si ha della parabola f(x) = ax^2 + bx + c è tutta concentrata nel punto di ascissa x = 5 ed è:

$$f(5) = 0, \quad f'(5) = -1 \quad e \quad f''(5) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} f(x) = ax^2 + bx + c \\ f'(x) = 2ax + b \\ f''(x) = 2a \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = a25 + b5 + c \\ -1 = 10a + b \\ -\frac{1}{2} = 2a \end{cases} \quad \begin{cases} c = -\frac{5}{4} \\ b = \frac{3}{2} \\ a = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} \quad f(x) = -x^2 + 6x - 5 = 0 \quad x = 3 \pm \sqrt{9-5} = \left\langle \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

$A(1,0) \quad B(5,0)$

- determinata la parabola e detti A e B i suoi punti d'intersezione con l'asse x calcolare l'area del triangolo ABC ove con C si è denotato il punto d'incontro delle tangenti alla parabola in A e in B e stabilire il rapporto tra tale area e quella del segmento parabolico di base AB;

retta tangente in A $y - 0 = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)(x-1) \quad y = x - 1$

retta tangente in B $y - 0 = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)(x-5) \quad y = -x + 5$

$\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = x - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 1 = -x + 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

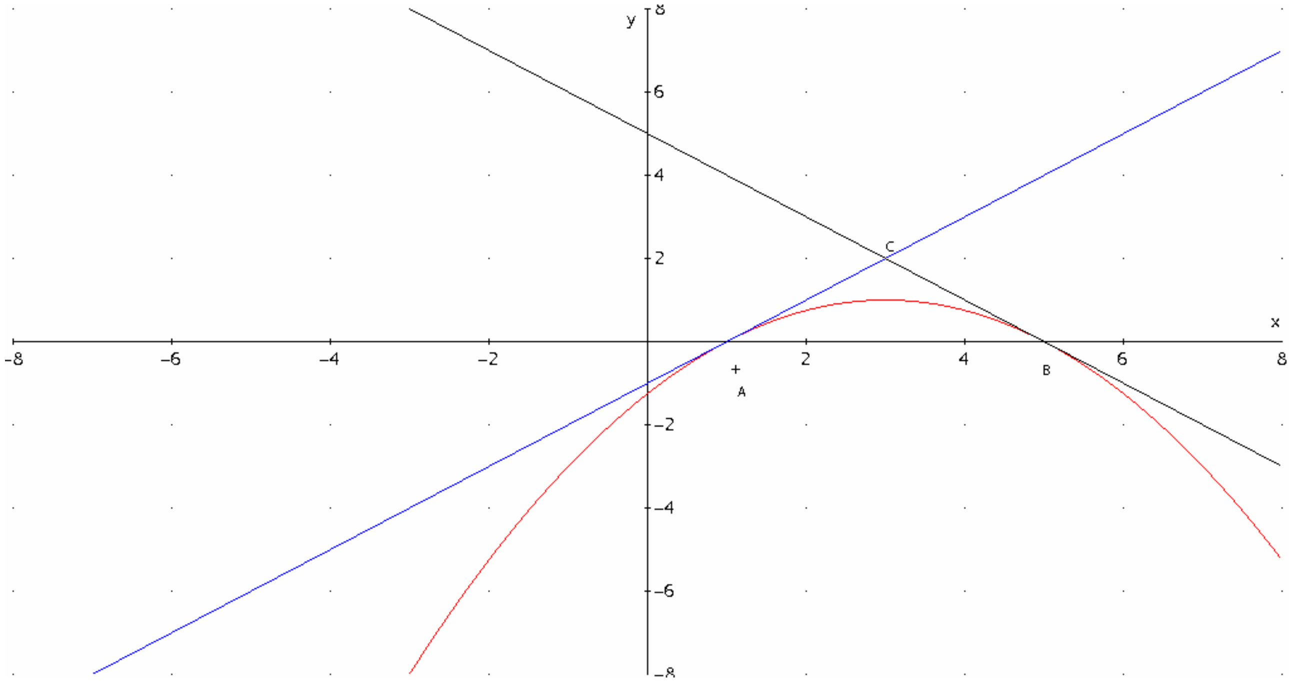
Ovviamente $Area = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} 4 \cdot 2 = 4$

Area segmento parabolico

$$S = \int_1^5 -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} dx = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x \Big|_1^5 = -\frac{125}{12} + \frac{75}{4} - \frac{25}{4} - \left(-\frac{1}{12} + \frac{3}{4} - \frac{5}{4}\right)$$

$$S = \frac{-125 + 225 - 75 + 7}{12} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$

$$Rapporto = \frac{4}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{2}$$



o stabilire altresì il rapporto tra i volumi descritti dalle aree prima considerate per effetto della loro rotazione completa attorno all'asse x.

In rotazione il Triangolo ABC diventa un doppio cono. E il volume vale

$$V = V1 + V2 = \frac{1}{3}\pi R^2 h + \frac{1}{3}\pi R^2 k = \frac{1}{3}\pi R^2 (h+k) = \frac{1}{3}\pi 2^2 4 = \frac{16}{3}\pi$$

Per la parabola

$$VolRot = \pi \int_1^5 \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}\right)^2 dx = \frac{32}{15}\pi$$

$$Rapporto = \frac{\frac{64}{3}\pi}{\frac{32}{15}\pi} = \frac{15}{3}\frac{16}{32} = \frac{5}{2}$$