Soluzione Maturità 2004 Pni

Problema 1

PROBLEMA **1**

Sia la curva d'equazione:

$$y = ke^{-\lambda x^2}$$

ove k e λ sono parametri positivi.

1. Si studi e si disegni γ;

C.E. $\forall x \in \mathbb{R}$ Curva simmetrica rispetto all'asse y

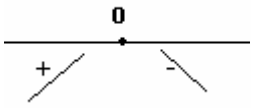
Positività: $y = ke^{-\lambda x^2} > 0$ sempre verifica.

Intersezione con l'asse x: nessuna soluzione

Intersezione con l'asse y: $(0,k)$

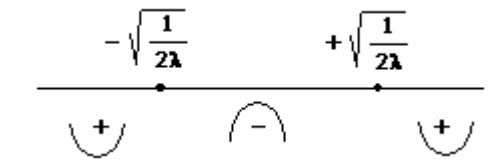
$\lim_{x\to\pm\infty} ke^{-\lambda x^2} = 0$ y=0 asintoto orizzontale

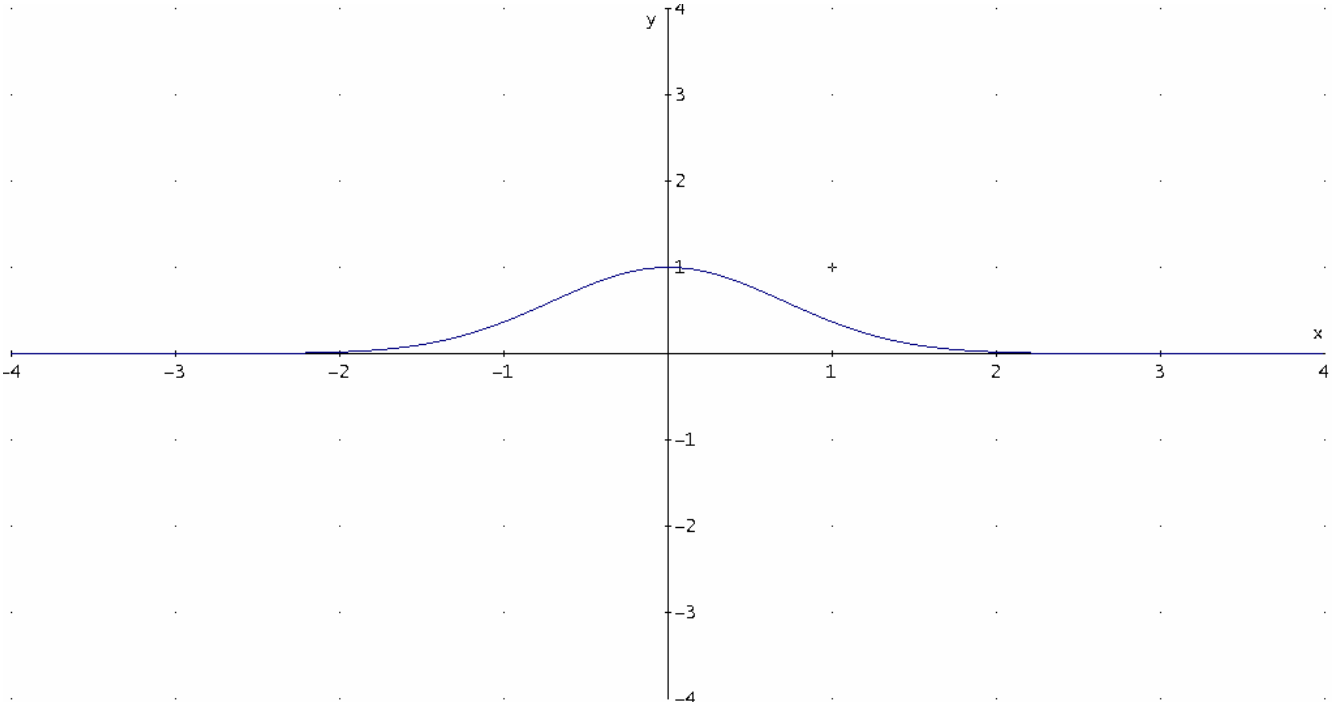
$y' = ke^{-\lambda x^2}\cdot(-2\lambda x) \geq 0 \quad x \leq 0$



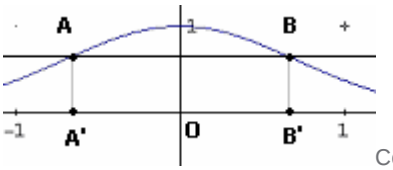
$Max(0,k)$

$$y'' = -2\lambda k\left[e^{-\lambda x^2}\cdot x(-2\lambda x) + e^{-\lambda x^2}\right] = -2\lambda k\cdot e^{-\lambda x^2}\left[-2\lambda x^2 + 1\right] = 2\lambda k\cdot e^{-\lambda x^2}\left[2\lambda x^2 - 1\right] \geq 0$$





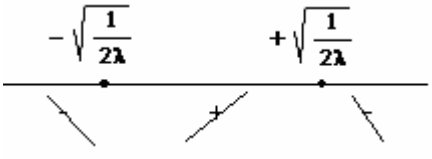
2. si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse x e i vertici del lato opposto su γ;



Considerando il generico rettangolo ABA'B'. con

$A(-t, ke^{-\lambda t^2})$ $B(t, ke^{-\lambda t^2})$ $A'(-t, 0)$ $B'(t, 0)$ e $t \geq 0$.

$Area = 2t \cdot ke^{-\lambda t^2}$ massimo per $Area' = 2\left[ke^{-\lambda t^2} - 2\lambda t^2 \cdot ke^{-\lambda t^2} \right] = 2ke^{-\lambda t^2}\left[1 - 2\lambda t^2\right] \geq 0$



Massimo per $t = \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$

3. sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ e assumendo $\lambda = \frac{1}{2}$, si trovi il valore da attribuire a k affinché l'area compresa tra γ e l'asse x sia 1;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-\lambda x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = k\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} d\frac{x}{\sqrt{2}} = k\sqrt{2\pi} = 1 \quad \text{da cui} \quad k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

4. per i valori di k e λ sopra attribuiti, γ è detta *curva standard degli errori* o *delle probabilità* o *normale di Gauss* (da *Karl Friedrich Gauss, 1777-1855*). Una media $\mu \neq 0$ e uno *scarto quadratico medio* $\sigma \neq 1$ come modificano l'equazione e il grafico?

L'equazione generale della gaussiana diventa $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

L'andamento grafico dell'equazione generale è lo stesso della curva standard. Quello che cambia è la posizione dell'asse di simmetria e le dimensioni della curva. In parole povere ho sempre la forma tipica a "campana" posizionata diversamente e dilatata nel piano.

Come si vede la funzione ha lo stesso C.E.
La curva diventa simmetrica rispetto a μ

L'intersezione con l'asse x diventa $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Stesso asintoto orizzontale

Derivata: $y' = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] = \frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left[-x+\mu\right] \geq 0$ e quindi massimo nel punto

$Max\left(\mu, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$.

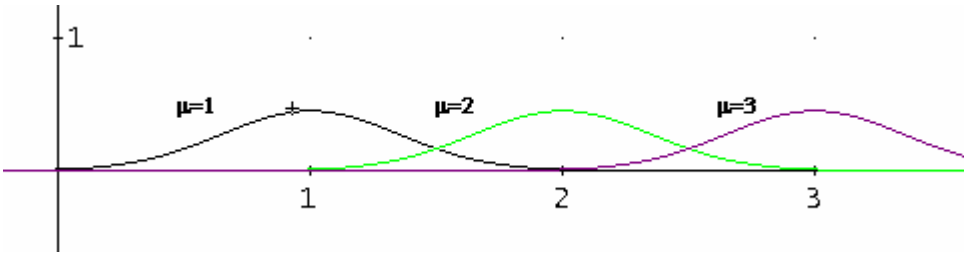
Praticamente il valore di μ trasla in grafico nella direzione dell'asse x. E il valore di σ dilata il grafico.

Con un opportuna traslazione e dilatazione si può tornare alla curva standard

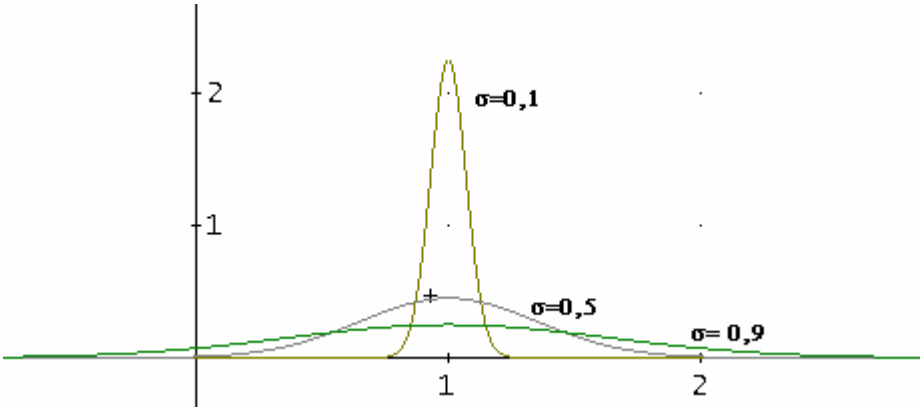
$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}-\frac{\mu}{\sigma}\right)^2}$ in fatti posto $\begin{cases} X = \frac{x}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} \\ Y = \sigma y \end{cases}$ $Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(X)^2}$

Si osserva che il determinate di suddetta trasformazione $\det A = \frac{1}{\sigma}\sigma - 0 = 1$ e quindi l'area o porzioni d'area sottese nelle curve gaussiane e l'area o porzioni d'area corrispondenti nella curva standard sono uguali. Infatti il rapporto di aree in una trasformazione affine è uguale al determinate della trasformazione

Per esempio, variando μ, assegnandoli valori come $\mu = 1, 2, 3$ $\sigma = \frac{1}{2}$ e si ha:



Per esempio variando σ, assegnandoli valori $\mu = 1 \quad \sigma = 0{,}1 - 0{,}5 - 0{,}9$ e si ha:



Problema 2

$$f(x) = \sin\frac{\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{2b}x + x$$

1)

se $a \le b$

$$f(a) = \sin\frac{\pi}{a}a\cos\frac{\pi}{2b}a + a = a \qquad f(b) = \sin\frac{\pi}{a}b\cos\frac{\pi}{2b}b + b = b$$

poiché f(x) è continua nell'intervallo $[a,b]$ se m e M sono il minimo e il massimo assoluto in questo intervallo allora $m \le f(a) < f(b) \le M$ allora per un la continuità la funzione assume tutti i valori

tra m e M e quindi anche il valore $\frac{a+b}{2}$ che è compreso tra a e b.

$$f(a) = a \le \frac{a+b}{2} \le f(b) = b$$

2)

$$f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x\cos\frac{\pi}{2}x + x = \frac{\sin\pi x}{2} + x$$

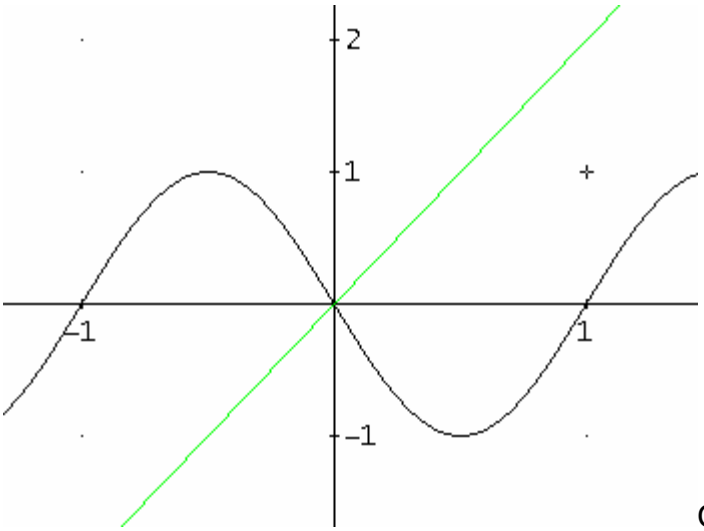
Osserviamo che la funzione è dispari dato che

$$f(-x)=\frac{\sin(-\pi x)}{2}+(-x)=-\frac{\sin(\pi x)}{2}-x=-\left(\frac{\sin \pi x}{2}+x\right)=-f(x)$$

ed inoltre la funzione f(x) è compresa tra le due rette $y=x-\frac{1}{2}$ $y=x+\frac{1}{2}$ dato che al massimo il seno può valere 1 o -1.

C.E. $(-\infty,+\infty)$

$$f(x)=\frac{\sin \pi x}{2}+x\geq 0 \quad x\geq -\frac{\sin \pi x}{2} \quad 2x\geq -\sin \pi x$$



Graficamente si vede che

$f(x)\geq 0$ per $x\geq 0$

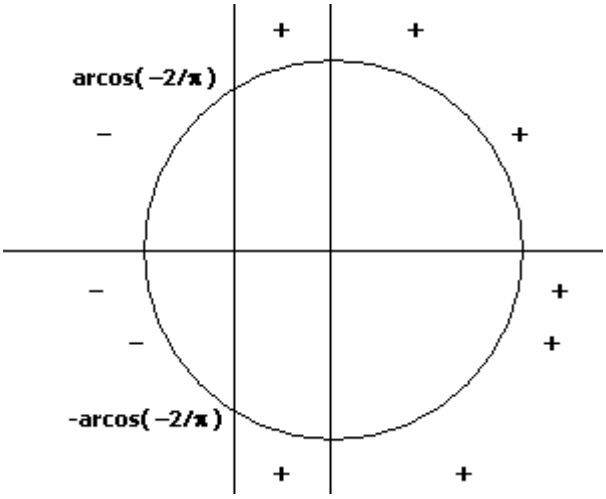
Quindi intersezione con gli assi O(0,0)

La funzione non ha asintoti verticali , orizzontali o obliqui.

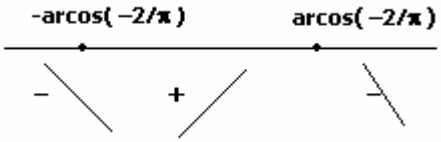
$$f'(x)=\frac{\pi}{2}\cos \pi x+1\geq 0 \quad \cos \pi x\geq -\frac{2}{\pi} \quad \pi x=ar\cos\left(-\frac{2}{\pi}\right)+2k\pi \quad x=\pm\frac{1}{\pi}ar\cos\left(-\frac{2}{\pi}\right)+2k$$

dove k numero intero qualsiasi.

dato che $ar\cos\left(-\frac{2}{\pi}\right)\simeq 2,26$ e quindi $x\simeq \pm 0,72+2k$



quindi



ho un massimo per $x \simeq 0,72 + 2k$ e minimi per $x \simeq -0,72 + 2k$

Massimi: $f(x) = \frac{\sin \pi(0,72 + 2k)}{2} + x = \frac{\sin 0,72\pi}{2} + 0,72 + 2k = 0,38 + 0,72 + 2k$

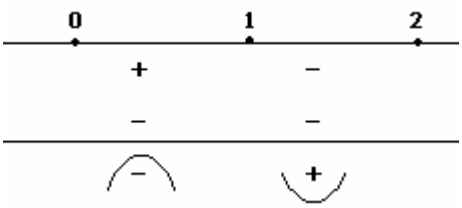
Minimi: $f(x) = \frac{\sin \pi(-0,72 + 2k)}{2} + x = \frac{\sin -0,72\pi}{2} - 0,72 + 2k = -0,38 - 0,72 + 2k$

Per k=0 $Max(0,72,1,1)$ $Min(-0,72,-1,1)$

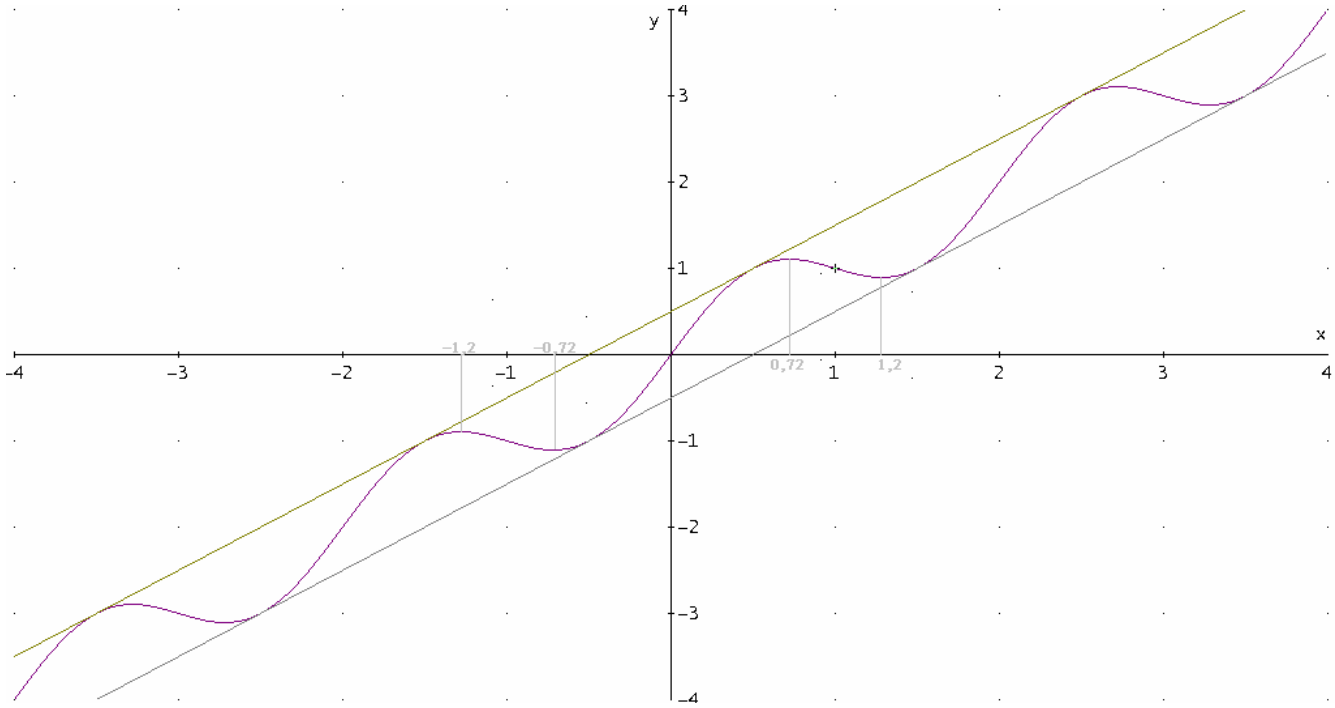
Per k=1 $Min(1.28,1.1)$

Per k=-1 $Max(-1.28,0.9)$

$f''(x) = -\frac{\pi^2}{2}\sin \pi x \geq 0$ da cui $0 \leq \pi x \leq \pi$ da cui $0 \leq x \leq 1$



in generale si hanno flessi per $x = k$ $f(x) = \frac{\sin k\pi}{2} + k = k$



3)

Utilizziamo il metodo di bisezione applicato nell'intervallo $[0,1]$

n	a	b	m	fa	fb	fm
0	0	1	0,5	2,570796	-0,5708	1
1	0,5	1	0,75	1	-0,5708	-0,11072
2	0,5	0,75	0,625	1	-0,11072	0,398882
3	0,625	0,75	0,6875	0,398882	-0,11072	0,127312
4	0,6875	0,75	0,71875	0,127312	-0,11072	0,003497
5	0,71875	0,75	0,734375	0,003497	-0,11072	-0,05488
6	0,71875	0,734375	0,726563	0,003497	-0,05488	-0,026

Da cui soluzione $x = 0,726563$

Questionario:

Quesito 1)

- L'angolo sessagesimale è la 360 parte dell'angolo giro, i sottomultipli sono i primi (1/60 di grado), i secondi (1/60 di minuto), e poi la divisione continua in decimi centesimi ecc.

- Preso un'angolo di una circonferenza di raggio 1, la misura dell'angolo in radianti corrisponde alla lunghezza dell'arco di tale angolo.

Vale la seguente proporzione $\frac{x}{\pi}=\frac{\alpha}{180°}$ dove x sono gli angoli misurati in radianti e alfa gli angoli misurati in gradi sessagesimali

- L'angolo è centesimale corrisponde alla centesima parte dell'angolo retto. Vale la seguente proporzione $\frac{y}{100}=\frac{\alpha}{90°}$ dove y sono gli angoli centesimali e alfa sono gli angoli sessagesimali.

Quesito 2)

Dato che la superficie di una Sfera di raggio R vale $S=4\pi R^2$ e dato che la superficie totale di un cilindro di raggio r vale $S=2\pi R^2+2\pi Rh=2\pi R^2+4\pi R^{\,2}=6\pi R^2$ e dato che $R=\sqrt{2}r$ allora

$$\frac{S_{sfera}}{S_{cilindo}}=\frac{4\pi R^2}{6\pi r^2}=\frac{4\pi\left(\sqrt{2}r\right)^2}{6\pi r^2}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

Quesito 3)

Una similitudine è un'affinità tale che il rapporto tra due segmenti corrispondenti vale k (k rapporto di similitudine).
Allora il volume varia come k^3 e l'area come k^2 e quindi . Se V' è il volume trasformato e V il volume iniziale $V'=27\cdot V$.
Se A' è la superficie trasformata e S la superficie iniziale $S'=9\cdot S$.

Quesito 4)

Le funzioni sono 81, ovvero Le disposizione con ripetizione di n oggetti su k posti.

$$D_{n,k}=n^k \qquad D_{3,4}=3^4=81$$

Quesito 5)

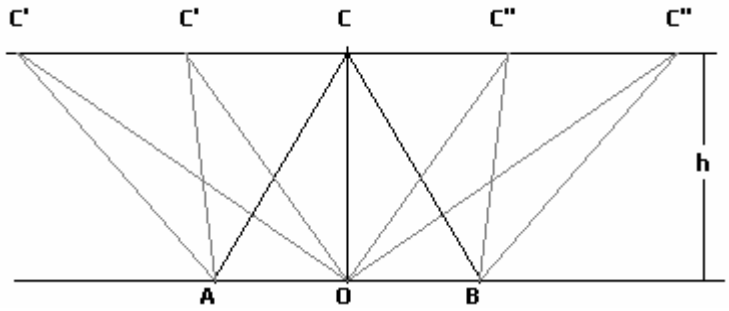
$$g(x):\begin{cases}3\dfrac{\sin(x-2)}{x-2} & x\neq 2\\ 4 & x=2\end{cases} \quad .$$

Quesito 6)

$$f(x)=\frac{5}{4}(-x^3+3x)+\frac{1}{2}$$

Quesito 7)

I triangoli di assegnata base AB, e di uguale area hanno la stessa altezza h . Il problema è simmetrico. Il vertice C si trova sempre sulla retta parallela che non contiene AB. Per ogni triangolo ABC', se ne trova un altro ABC'' simmetrico rispetto all'asse OC.
La figura simmetrica di se stessa è il triangolo isoscele ABC, ed è in triangolo avente perimetro minimo.



Oppure considerando un opportuno sistema di assi cartesiani dove O(0,0) C(x,h) e A(-a,0) B(a,0)

Si ha che $Perimetro = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{AB}$ dove $\overline{PA} = \sqrt{(x+a)^2 + h^2}$ $\overline{PB} = \sqrt{(x-a)^2 + h^2}$ $\overline{AB} = 2a$

$$Perimetro = \sqrt{(x+a)^2 + h^2} + \sqrt{(x-a)^2 + h^2} + 2a$$

Derivando $P' = \frac{2(x+a)}{2\sqrt{(x+a)^2 + h^2}} + \frac{2(x-a)}{2\sqrt{(x-a)^2 + h^2}} = 0$ da cui

$$\frac{(x+a)}{\sqrt{(x+a)^2 + h^2}} = \frac{(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2 + h^2}} \quad \frac{(x+a)^2}{(x+a)^2 + h^2} = \frac{(x-a)^2}{(x-a)^2 + h^2}$$

$$(x+a)^2\left[(x-a)^2 + h^2\right] = (x-a)^2\left[(x+a)^2 + h^2\right] \text{ da cui}$$

$$\cancel{(x+a)^2(x-a)^2} + h^2(x+a)^2 = \cancel{(x-a)^2(x+a)^2} + h^2(x-a)^2$$

$h^2(x+a)^2 = h^2(x-a)^2$ $(x+a)^2 = (x-a)^2$ $x^2 + 2ax + a^2 = x^2 - 2ax + a^2$ da cui $4ax = 0$ e quindi x=0.
E per x=0 il triangolo ABC diventa isoscele

Quesito 8)

$a + b = ab$ dividendo tutto per ab si ha che $\frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} = \frac{ab}{ab}$ da cui $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = 1$

posto $x = \frac{1}{a}$ e $y = \frac{1}{b}$ si ha $x + y = 1$ e se per esempio $x = \frac{1}{a} = \frac{1}{3}$ ho che $y = \frac{1}{b} = \frac{2}{3}$ e quindi due valori sono

$a = 3$ e $b = \frac{3}{2}$

Quesito 9)

la $y = e^x + 3x$ è crescente infatti $y' = e^x + 3 > 0$ per qualsiasi x, inoltre è definita per ogni x, ed è continua.

Ora dato che $\lim_{x\to-\infty} e^x+3x=0-\infty=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty} e^x+3x=+\infty+\infty=+\infty$,

la funzione necessariamente, per i teoremi sulla continuità, ammette un solo valore di x per cui f(x)=0.

Tramite il metodo di bisezione, nell'intervallo $[-1,0]$

n	a	b	m	fa	fb	fm
0	-1	0	-0,5	-2,63212	1	-0,89347
1	-0,5	0	-0,25	-0,89347	1	0,028801
2	-0,5	-0,25	-0,375	-0,89347	0,028801	-0,43771
3	-0,375	-0,25	-0,3125	-0,43771	0,028801	-0,20588
4	-0,3125	-0,25	-0,28125	-0,20588	0,028801	-0,08891
5	-0,28125	-0,25	-0,26563	-0,08891	0,028801	-0,03015
6	-0,26563	-0,25	-0,25781	-0,03015	0,028801	-0,0007

Da cui soluzione x=-0,2578

Quesito 10)

Considerato l'affinità generale $\begin{cases} x'=ax+by+p \\ y'=cx+dy+q \end{cases}$

$$\begin{cases} x'=\sqrt{3}x-y \\ y'=x+\sqrt{3}y \end{cases}$$

Prima di tutto si tratta di un'affinità con $\det A=ad-bc=3+1=4>0$. (Trasformazione diretta)

E poiché la trasformazione soddisfa la condizione $a^2+c^2=b^2+d^2=|ad-bc|$ si tratta di una similitudine di rapporto $k=\sqrt{\det A}=2$

In conclusione si tratta di una similitudine diretta e quindi di una rotazione di centro (0,0) e angolo uguale a 30°.

Infatti considerato le rotazioni di centro O(0,0)

$$\begin{cases} x'=k(\cos\alpha x-\sin\alpha y) \\ y'=k(\sin\alpha x+\cos\alpha y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=\sqrt{3}x-y=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)=2\left(\cos 30°x-\sin 30°y\right) \\ y'=x+\sqrt{3}y=2\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)=2(\sin 30°x+\cos 30°y) \end{cases}$$