A. S. 1998/99 - INDIRIZZO P.N.I.

BRS1 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

La prova consiste nello svolgimento di due soli quesiti, scelti tra quelli proposti.

1. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è data la parabola γ di equazione:

$$y = \frac{x^2}{2} - x$$

Siano A un punto dell'asse x di ascissa λ , con $\lambda > 0$, B il suo simmetrico rispetto ad O, e A' e B' i punti della parabola le cui proiezioni ortogonali sull'asse x sono rispettivamente A e B.

Il candidato:

a. verifichi che le tangenti *a* e *b* alla parabola γ , rispettivamente in A' e B', s'incontrano in un punto E dell'asse y;
b. detti C e D i rispettivi punti d'intersezione di *a* e *b* con l'asse x, esprima in funzione di λ l'area *s* del triangolo CED;
c. studi la funzione $s(\lambda)$ e tracci, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali O'λ *s*, la curva C di equazione $s = s(\lambda)$;
d. detto λ_0 il valore di λ per cui *s* assume valore minimo relativo, e detti a_0 e b_0 le posizioni di *a* e *b* per detto valore, calcoli l'area della regione finita del semipiano di equazione $y \leq 0$, compresa tra γ , a_0 e b_0;
e. osservato che, nell'ipotesi posta di $\lambda > 1$, esistono due valori λ_1 e λ_2, con $\lambda_1 < \lambda_2$, per cui il triangolo CED è equivalente al quadrato di lato OA, descriva una procedura che consenta di calcolare i valori approssimati di λ_1 con un'approssimazione di 10^{-n} e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

2. In un piano α è assegnato il triangolo *ABC*, retto in *B*, i cui cateti *AB* e *BC* misurano rispettivamente 4 e 3.

Si conduca per il punto *A* la perpendicolare al piano α e sia *V* un punto di questa per cui *VA=AB.*

Il candidato:

a. dimostri, geometricamente o algebricamente, che, come tutte le altre facce del tetraedro *VABC*, anche la faccia *VBC* è un triangolo rettangolo, il cui angolo retto è $V\hat{B}C$;
b. calcoli il volume e la superficie totale del tetraedro;
c. detto *M* il punto medio di *VA* e *P* un punto dello stesso segmento a distanza x da *V*, esprima in funzione di x il volume *v* del tetraedro *MPQR*, essendo *Q* ed *R* le rispettive intersezioni degli spigoli *VB* e *VC* con il piano β parallelo ad α e passante per *P*;

d. studi come varia *v* al variare di *P* sul segmento *VA*, determinando in particolare la posizione $\overline{P}$ di *P* in cui il volume *v* assume valore massimo assoluto;
e. detto *D il* punto medio di *VB* ed *E il* punto di *AC* tale che *AE=AB*, determini la posizione *P** di *P* che rende minima la somma *DP+PE (si* consiglia di far ruotare il triangolo *VAB* attorno ad *AV* fino a portarlo nel piano del triangolo *VAE*, simmetricamente a quest'ultimo, e considerare la somma *D'P+PE*, essendo *D' il* corrispondente di *D* nella suddetta rotazione).

3. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono dati i punti P(x,y), A(x',y'), B(x",y"), P'(X,Y), legati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = -y' \\ y'' = x' \end{cases} \quad \begin{cases} X = x''+2 \\ Y = y''-1 \end{cases}$$

Il candidato:

a. dica la natura delle trasformazioni T_1, T_2, T_3, rappresentate rispettivamente dalle predette equazioni;
b. determini la trasformazione *T* che fa passare da P a P';
c. studi la trasformazione *T* enunciandone le proprietà e determinandone, in particolare, gli eventuali elementi uniti;
d. considerati i punti C(3,0), D(0, $\sqrt{3}$), E(0,-$\sqrt{3}$), e detti γ la circonferenza per tali punti, *a* la retta *CD*, γ ' ed *a'* i trasformati di γ ed *a* mediante *T*, determini l'area delle regioni finite di piano delimitate da γ ' ed *a'*;
e. determini il perimetro delle stesse regioni.

Durata massima della prova: 6 ore.

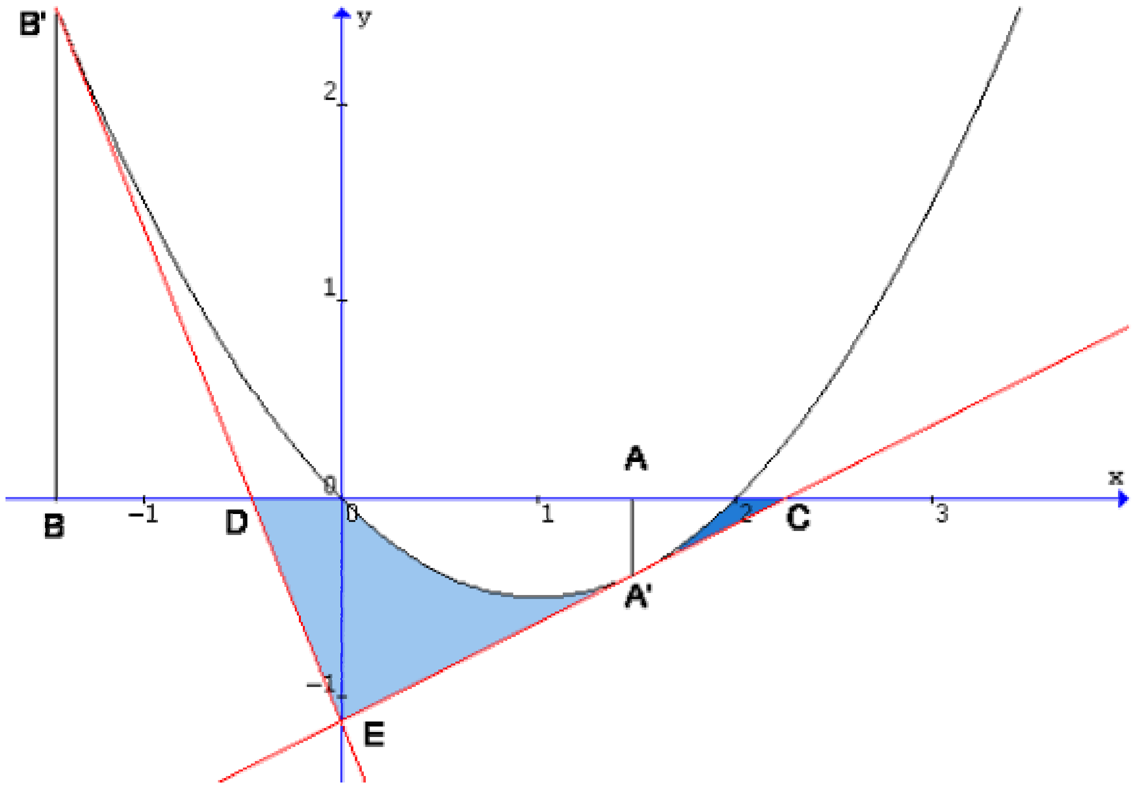
È consentito l'uso della calcolatrice scientifica non grafica.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Sessione ordinaria - Indirizzo P.N.I. 1999
Soluzione quesito 1

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x$$

$A(\lambda;0)$ $\quad B(-\lambda;0)$ $\quad A'(\lambda;\frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda)$ $\quad B'(-\lambda;\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda)$



a)

y' = x - 1

$y'(\lambda) = \lambda - 1 \qquad y'(-\lambda) = -\lambda - 1$

$a: \quad y = (\lambda - 1)x - \frac{1}{2}\lambda^2$

$b: \quad y = (-\lambda - 1)x - \frac{1}{2}\lambda^2$

$E = (0; -\frac{1}{2}\lambda^2)$

b)

$X_C = \frac{\lambda^2}{2(\lambda - 1)} \qquad X_D = \frac{-\lambda^2}{2(\lambda + 1)}$

$\overline{CD} = |X_C - X_D| = \frac{1}{2}\lambda^2 \left| \frac{2\lambda}{\lambda^2 - 1} \right|$

$s = \frac{1}{4}\left| \frac{\lambda^3}{\lambda^2 - 1} \right| \qquad (con \quad \lambda > 0)$

c)

E' sufficiente studiare la funzione di equazione

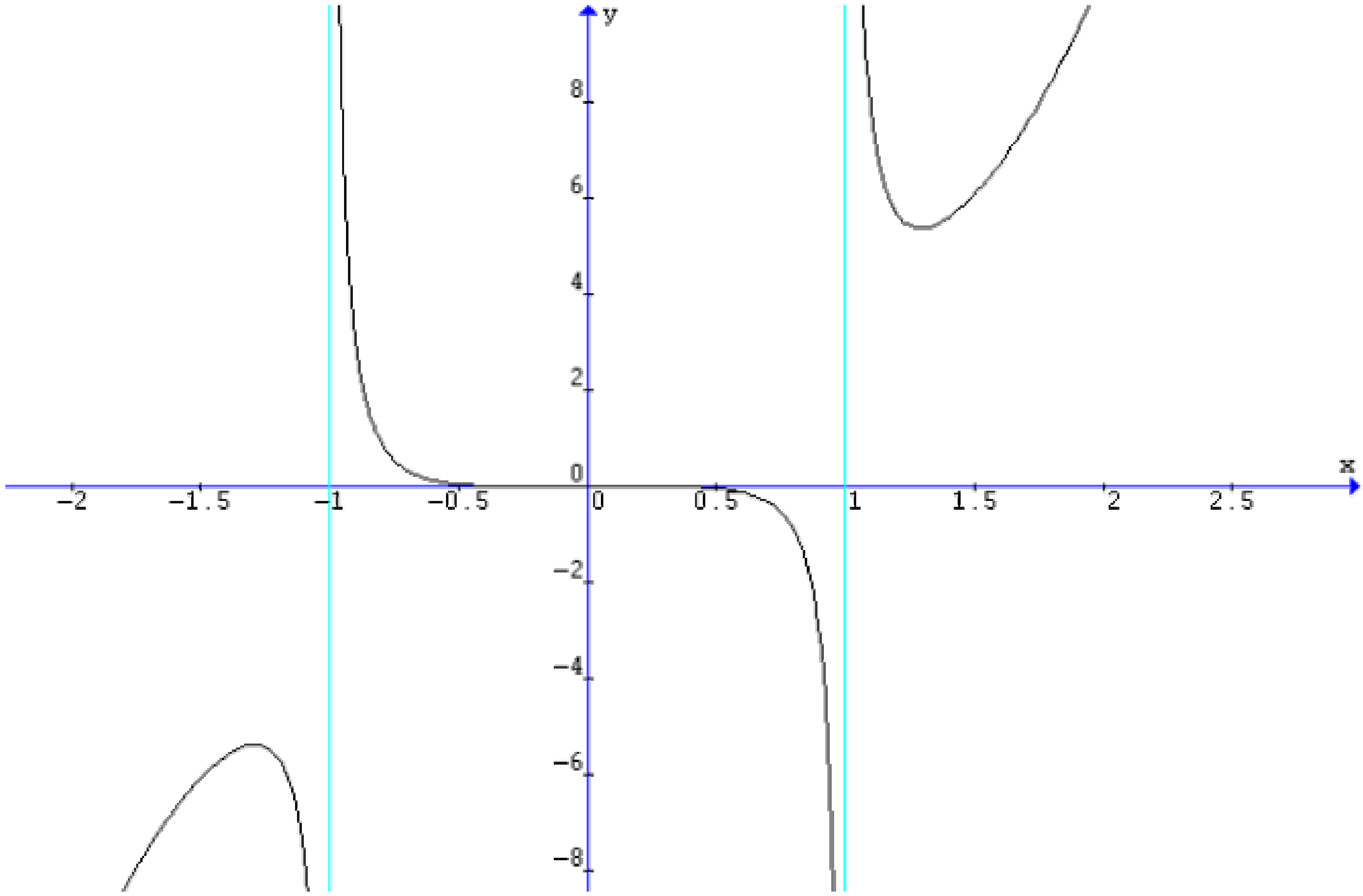
$$y = \frac{x^5}{x^2 - 1} \qquad \text{(per comodità si è posto } y = s \text{ ed } x = \lambda\text{)}$$

che ha come derivate prima e seconda

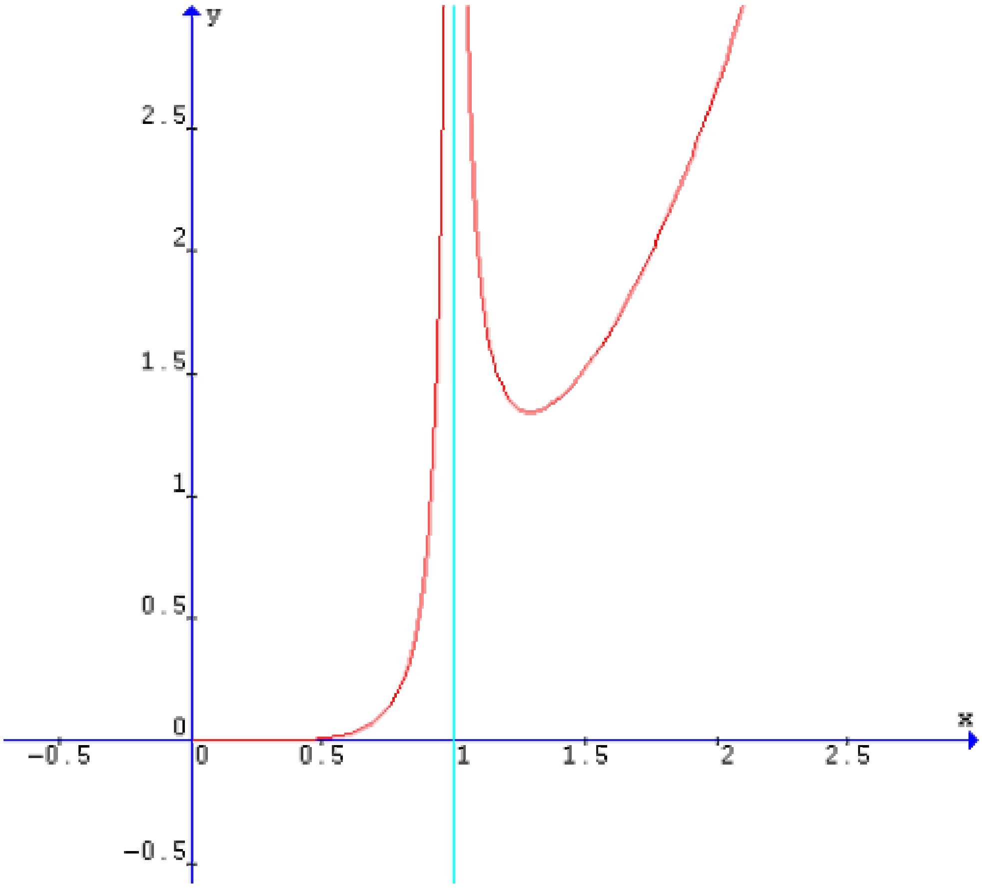
$$y' = \frac{x^4(3x^2 - 5)^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x^3(3x^4 - 9x^2 + 10)}{(x^2 - 1)^3}$$

Si ottiene il grafico



Da questo, tenendo conto delle limitazioni sulla x si ottiene il grafico richiesto



L'analisi della derivata prima permette di stabilire che il minimo relativo si ottiene per

$$x = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

d)

In corrispondenza del valore

$$\lambda = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

si ottiene

$$E(0;-\frac{5}{6})$$

L'area richiesta (v. figura iniziale) si ottiene sommando l'area del triangolo OED e l'area del triangolo mistilineo OEA':

$$Area(OED) = \frac{5/6}{\sqrt{\frac{5}{3}}+1}$$

Per l'area di OEA' si deve calcolare l'integrale

$$\int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} [\frac{1}{2}x^2 - x - (\sqrt{\frac{5}{3}} - 1)x + \frac{5}{6}]dx = \ldots\ldots\ldots =$$

$$\frac{95}{72}\sqrt{\frac{5}{3}} - \frac{25}{24} \cong 0.6617$$

N.B.

Se si considera anche il triangolo mistilineo compreso tra l'asse x, la parabola ed il segmento A'C basta sottrarre allarea del triangolo ECD il segmento parabolico sotto l'asse delle x:

$$\frac{\overline{CD}\cdot\overline{OE}}{2} - \frac{2}{3}(2)(\frac{1}{2}) = \frac{25}{12}\sqrt{\frac{5}{3}} - \frac{2}{3}$$

e)

$$\lambda > 1 \quad \lambda_1 < \lambda_2$$

$$A(CED) = \overline{OA}^2$$

$$\frac{1}{4}\frac{\lambda^3}{\lambda^2 - 1} = \lambda^2$$

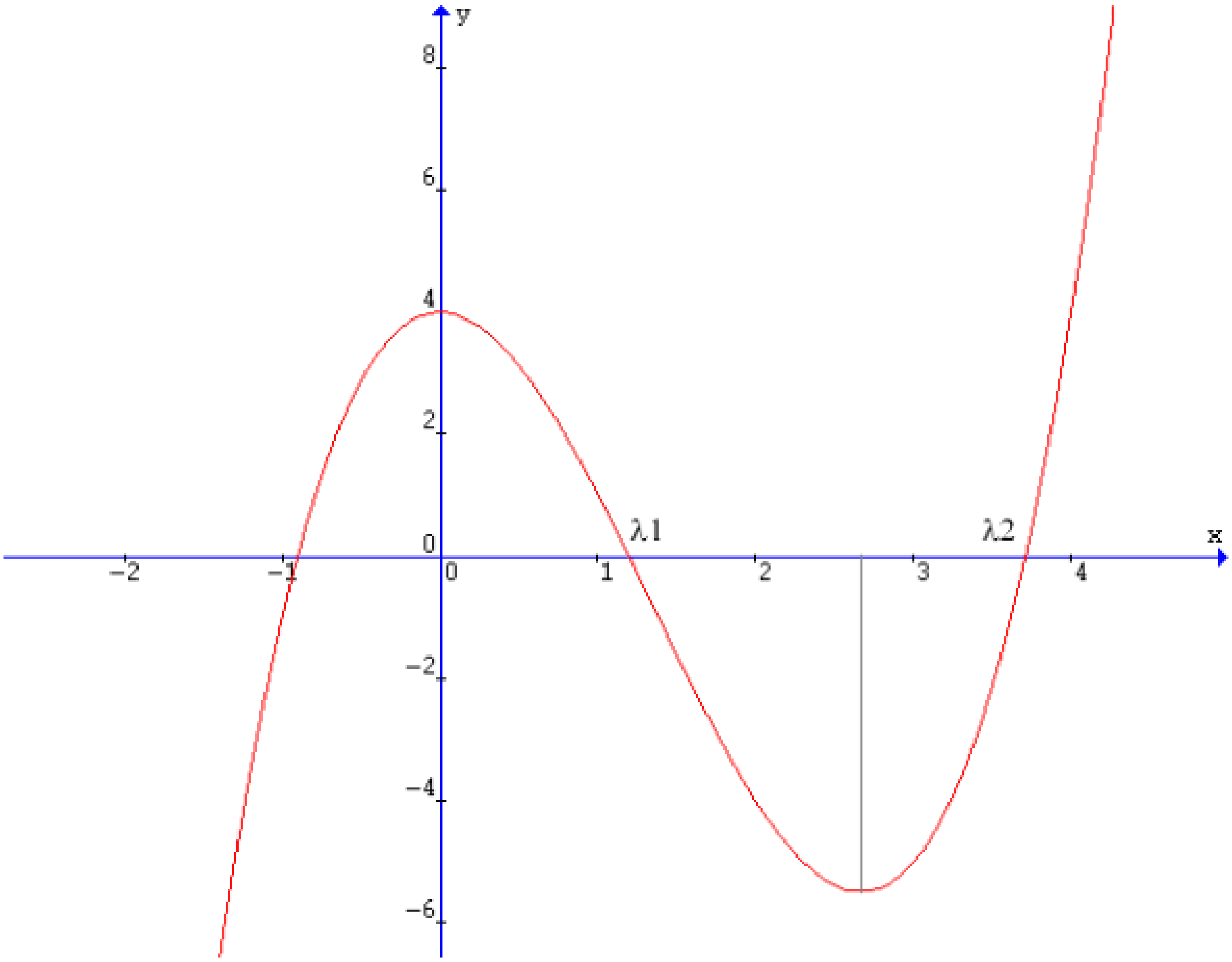
che, con le condizioni su λ, conduce all'equazione di terzo grado

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4 = 0$$

Uno studio qualitativo della funzione di equazione

$y = x^3 - 4x^2 + 4$

porta al grafico



da cui si nota che la radice richiesta è compresa tra 1 e 2 (Derive fornisce per le due radici positive i valori approssimati

1.19393 e 3.70927).

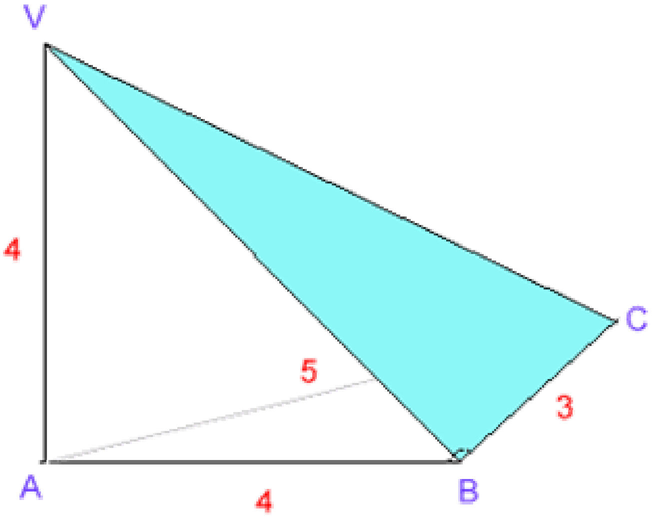
Un possibile programma in Pascal (che usa il metodo di bisezione) per calcolare un valore approssimato della prima radice positiva è il seguente:

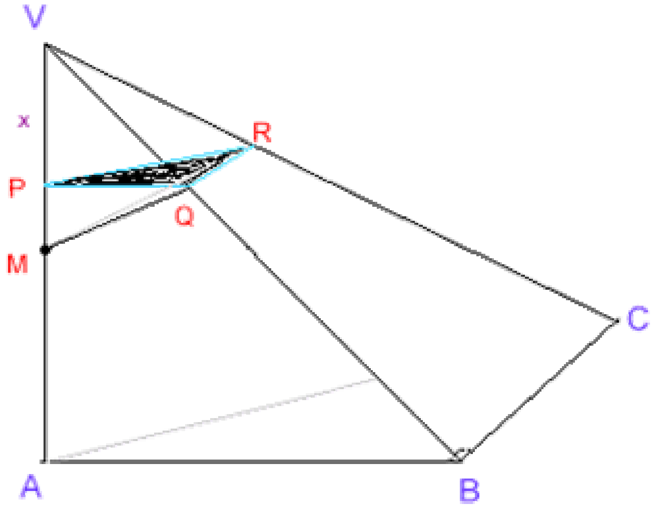
```
PROGRAM  pni99;

Uses Crt;

Const    a=1;
         b=2;

Var      n:integer;
         c:real;
         risposta:char;
(*------------------------------------------------------------------------*)

Procedure Presentazione;
```

```
Begin
  Writeln('Questo programma permette di calcolare la radice di ');
  writeln('X^3 - 4X^2 +4 = 0       nell''intervallo [1;2]');
  Writeln('a meno di 10 ^(-n) ');
  Writeln;writeln;

End;
(*------------------------------------------------------------------------*)

Procedure  Dati;
Begin
 Write('n = ');
 Readln(n);
 Writeln;
 Writeln('--------------------------------------------------')
End;
(*------------------------------------------------------------------------*)

Function  f(x:real):real;
Begin
  f:=x*x*x-4*x*x+4
End;

(*------------------------------------------------------------------------*)

Procedure  Elabora;

Var   errore,x1,x2:real;

Begin
  errore:=exp(-n*ln(10));   (*10^(-n)*)
  x1:=a;         x2:=b;
  Repeat
    c:=(x1+x2)/2;
    If f(c)*f(x1)<0 then
    x2:=c  ELSE   x1:=c
  Until  (abs(x2-x1)<errore)  or (f(c)=0)
end;

(*------------------------------------------------------------------------*)

Procedure Comunica;

 Begin
  Writeln('La radice , con l''approssimazione richiesta , : ',c:10:n);
  Writeln;
  Writeln('--------------------------------------------------')
End;

(*------------------------------------------------------------------------*)

BEGIN (*main*)

Repeat
 Clrscr;
 Presentazione;
 Dati;
 Elabora;
 Comunica;
 Write('Ancora? (s/n)  ');
 Readln(risposta);
Until risposta in ['n','N']

END.
```

Sessione ordinaria - Indirizzo P.N.I. 1999
Soluzione quesito 2

a)





1. Il triangolo VBC è rettangolo con angolo retto in B poiché BC è perpendicolare al piano ABV e quindi anche ad ogni retta del piano ABV che passa per B
2. Che il triangolo ABV sia rettangolo si può anche verificare applicando il teorema di Pitagora; si scopre facilmente la relazione

$$\overline{BV}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{VC}^2 \quad essendo:$$

$$\overline{VC} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

$$\overline{BV} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

$$\overline{BC} = 3$$

b)

$$V = \frac{1}{3} Area(ABC) \cdot h = 8u^3$$

$$Area\ totale = (24 + 6\sqrt{2})\ u^2 = 6(4+\sqrt{2})\ u^2$$

c)

$$\overline{PV} = x \quad con \quad 0 \le x \le 4$$

$$V(MPQR) = f(x)$$

$$\frac{A(PQR)}{A(ABC)} = \frac{\overline{VP}^2}{\overline{VA}^2} \quad da\ cui$$

$$A(PQR) = \frac{3}{8}x^2 \text{ e quindi si ottiene :}$$

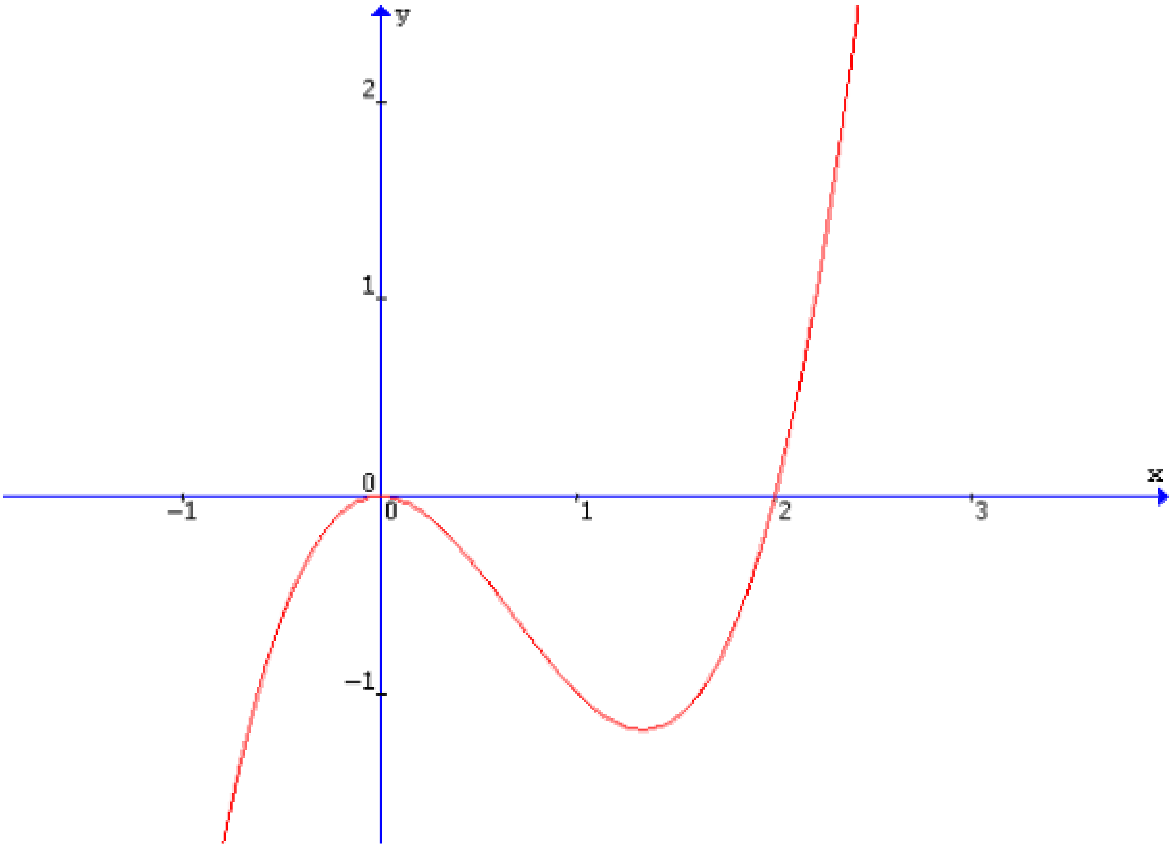
$$v = \frac{1}{8}x^2\,|2-x|$$

d)

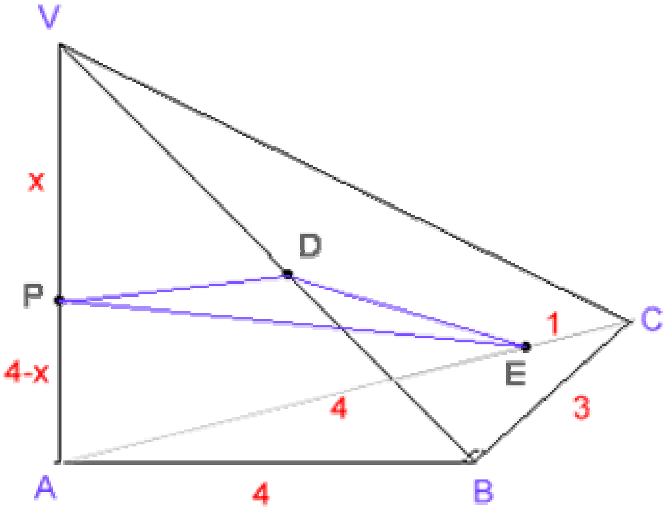
La funzione da studiare può essere facilmente dedotta dalla funzione di equazione

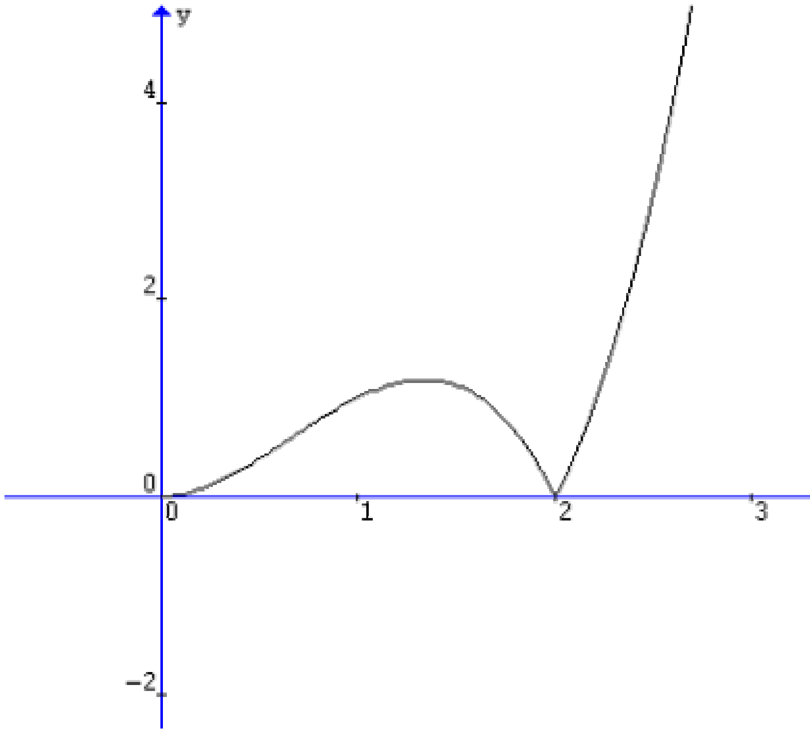
$$y = \frac{1}{8}x^2(x-2)$$

il cui grafico è



Da questo si deduce facilmente il grafico richiesto

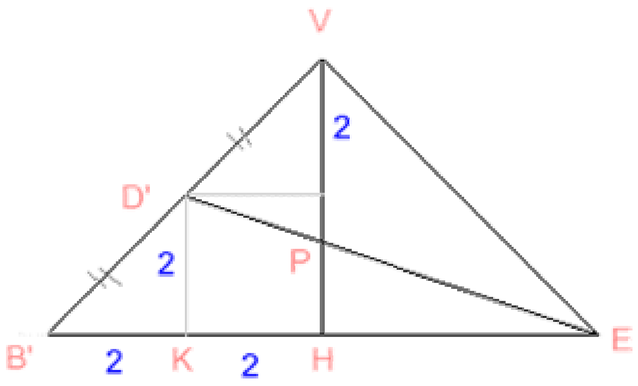




da considerare da 0 a 4 in base alle limitazioni geometriche sulla x.

Tale funzione ha il massimo assoluto per **x = 4**, che rappresenta la distanza di P da V nel caso richiesto (volume massimo); il **volume massimo vale 4** e si ha quando P coincide con A: in tal caso il tetraedro MPQR ha la massima area di base (ABC) e la massima altezza (4).

e)



Effettuando la rotazione suggerita e indicando con D' e B' le posizioni assunte da D e B, osservando la figura si nota come il minimo richiesto (che corrisponde al minimo della somma D'P + PE) si ottenga quando D', P ed E sono allineati.

Risulta:

$$\overline{D'V} = 2\sqrt{2} \quad \overline{B'H} = \overline{HE} = 4 \quad \frac{\overline{D'K}}{\overline{PH}} = \frac{\overline{KE}}{\overline{HE}}$$

da cui si ottiene facilmente

$$\overline{PH} = \frac{4}{3} \quad \text{e quindi} \quad x = \overline{VP} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = \overline{VP}*$$

N.B.

Allo stesso risultato si può arrivare senza eseguire la rotazione suddetta.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo APE si calcola la misura di PE:

$$\overline{PE} = \sqrt{16 + (4 - x)^2}$$

Applicando il teorema di Carnot al triangolo VPD (che ha l'angolo in V di 45°) si calcola la misura di PD:

$$\overline{PD} = \sqrt{x^2 + 8 - 4\sqrt{2}x\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Si tratta quindi di determinare il minimo della funzione di equazione

$$y = \sqrt{x^2 - 8x + 32} + \sqrt{x^2 - 4x + 8}$$

Mediante il calcolo delle derivate si arriva alla determinazione del minimo richiesto (x=8/3).

$$\begin{cases} X = -2y + 2 \\ Y = +2x - 1 \end{cases}$$

Sessione ordinaria - Indirizzo P.N.I. 1999
Soluzione quesito 3

a)

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$$ T_1 rappresenta un'omotetia di centro O e rapporto 2

$$\begin{cases} x'' = -y' \\ y'' = x' \end{cases}$$ T_2 rappresenta una rotazione di 90° in senso antiorario intorno all'origine O

$$\begin{cases} X = x''+2 \\ Y = y''-1 \end{cases}$$ T_3 rappresenta una traslazione di vettore (2;-1)

b)

La trasformazione T è la composizione delle tre trasformazioni date, ovvero

$$T = T_3 \circ (T_2 \circ T_1)$$

le cui equazioni si ottengono come segue:

$$\begin{cases} X = x''+2 = -y'+2 = -2y + 2 \\ Y = y''-1 = x'-1 = 2x - 1 \end{cases}$$

La T ha quindi equazioni

c)

T rappresenta una similitudine diretta di rapporto k=2; il rapporto tra le aree delle figure corrispondenti è $k^2 = 4$. Tale trasformazione è una particolare affinità che muta circonferenze in circonferenze; come tutte le affinità mantiene il parallelismo tra le rette; k rappresenta il rapporto tra i segmenti corrispondenti, che è, appunto, costante.

- Ricerca **punti uniti**:

  ponendo X=x e Y=y nelle equazioni della trasformazione si scopre, con semplici calcoli, il **punto unito (4/5;3/5)**

- Ricerca **rette unite:**

  Data la retta generica di equazione

  aX + bY + c = 0 (a e b non contemporaneamente nulli)

  La sua corrispondente in T ha equazione

  2b x -2a y +2a - b + c = 0

  Le due rette coincidono se

  a/2b = b/(-2a) = c/(2a - b +c)

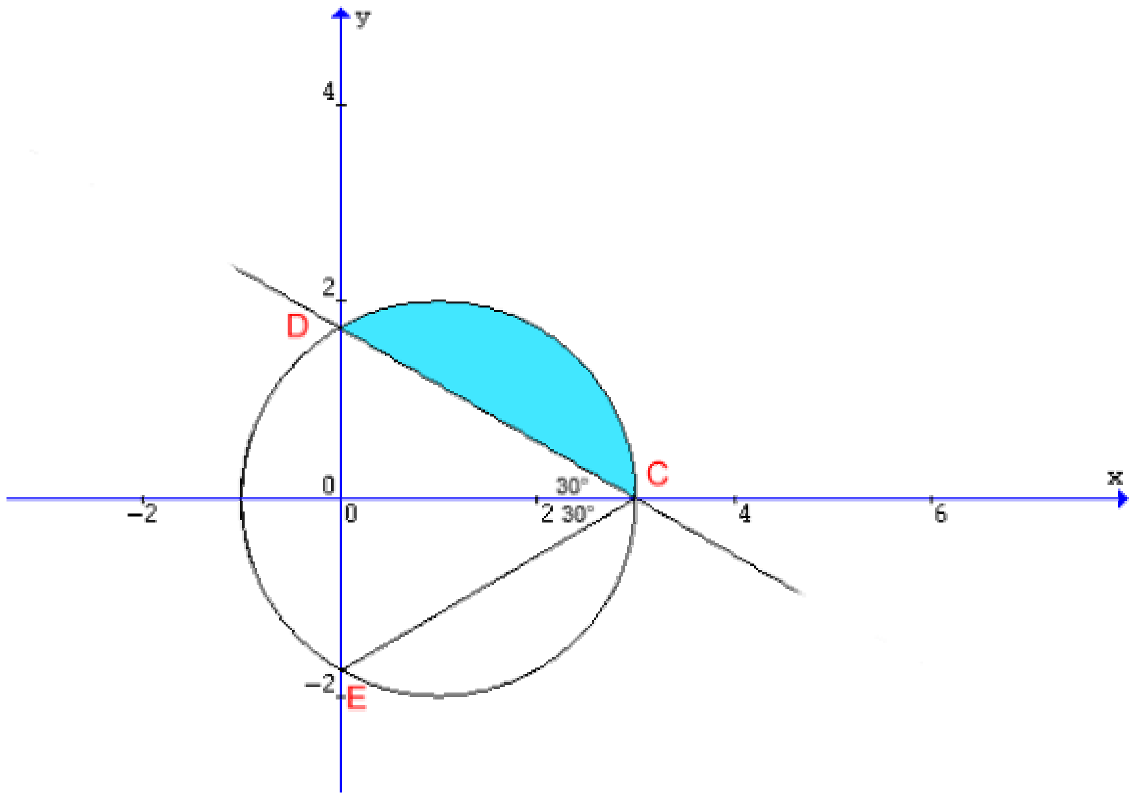
  La prima uguaglianza diventa

  $-2\ a^2 = 2\ b^2$

  che è verificata solo per **a** e **b** contemporaneamente nulli, situazione mai verificata.

  Non ci sono quindi rette unite.

d)



Risulta

$\frac{\overline{DO}}{\overline{OC}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ pertanto l'angolo DCO misura 30°.

Il triangolo CDE è pertanto equilatero. Essendo

$\overline{DE} = 2\sqrt{3} = R\sqrt{3}$ risulta R=2.

N.B. Il centro della circonferenza circoscritta ad un triangolo equilatero coincide con il baricentro, che nel nostro caso è il punto di coordinate (1;0); ma, per rispondere al quesito, non serve l'equazione della circonferenza.

Per determinare le aree ed i perimetri richiesti è sufficiente trovarli nella figura di partenza e poi applicare le proprietà della similitudine (l'area si moltiplica per 4 ed il perimetro per 2).

Detta A_1 l'area del segmento circolare più piccolo risulta:

$3\ A_1$ = area cerchio - area triangolo CDE = $4\pi - 3\sqrt{3}$

quindi, indicata con A'_1 la prima delle due aree richieste, si ha:

$$A_1 = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad A_1' = 4\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$$

L'area del secondo segmento circolare si ottiene sottraendo all'area del cerchio l'area del primo segmento circolare:

$$A_2 = 4\pi - A_1 = \frac{8}{3}\pi + \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad A'_2 = 4\left(\frac{8}{3}\pi + \sqrt{3}\right)$$

e)

Il perimetro della prima regione è uguale ad un terzo della circonferenza più il lato del triangolo.

Con notazioni analoghe a quelle del punto precedente si ha:

$$2p_1 = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad 2p'_1 = 2\left(\frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}\right)$$

Il perimetro della seconda regione è uguale a due terzi di circonferenza più il lato del triangolo:

$$2p_2 = \frac{8}{3}\pi + 2\sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad 2p'_2 = 2\left(\frac{8}{3}\pi + 2\sqrt{3}\right)$$

N.B.

La circonferenza γ ha centro (1;0) e raggio 2; la sua equazione è:

$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

La circonferenza trasformata si ottiene applicando alla precedente la trasformazione T^{-1} le cui equazioni sono:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1+Y}{2} \\ y = \dfrac{2-X}{2} \end{cases}$$

Si ottiene:

$X^2 + Y^2 - 4X - 2Y - 11 = 0$

La retta **a** ha equazione

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$$

e la sua trasformata **a'**

$$3X - \sqrt{3}Y + 5\sqrt{3} - 6 = 0$$