<u>Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO</u>

PIANO NAZIONALE DI INFORMATICA

CORSO SPERIMENTALE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Due numeri x e y hanno somma e quoziente uguali ad un numero reale *a* non nullo.
Riferito il piano ad un sistema S di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche (x,y):

1. si interpreti e discuta il problema graficamente al variare di *a*;
2. si trovi l'equazione cartesiana del luogo γ dei punti P(x,y) che soddisfano al problema;
3. si rappresentino in S sia la curva γ che la curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante;
4. si determini l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da γ e da γ' e se ne dia un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati;
5. si calcoli y nel caso che x sia uguale a 1 e si colga la particolarità del risultato.

PROBLEMA 2

I raggi *OA = OB = 1 metro* tagliano il cerchio di centro *O* in due settori circolari, ciascuno dei quali costituisce lo sviluppo della superficie laterale di un cono circolare retto.
Si chiede di determinare:

1) il settore circolare (arco, ampiezza e rapporto percentuale con il cerchio) al quale corrisponde il cono C di volume massimo, il valore V di tale volume massimo e il valore V' assunto in questo caso dal volume del secondo cono C';
2) la capacità complessiva, espressa in litri, di C e di C';
3) un'approssimazione della misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura del cono C, specificando il metodo numerico che si utilizza per ottenerla.

QUESTIONARIO

1. Se a e b sono numeri positivi assegnati quale è la loro media aritmetica? Quale la media geometrica? Quale delle due è più grande? E perché? Come si generalizzano tali medie se i numeri assegnati sono n?

2. Il seguente è uno dei celebri problemi del *Cavaliere di Méré (1610 - 1685)*, amico di *Blaise Pascal*: “giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?”

Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

PIANO NAZIONALE DI INFORMATICA

CORSO SPERIMENTALE

Tema di: MATEMATICA

3. Assumendo che i risultati - X, 1, 2 - delle 13 partite del Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.

4. Calcolare

$$\lim_{n \mapsto \infty} \frac{3^n}{n!}$$

5. Cosa si intende per "*funzione periodica*"? Quale è il *periodo* di $f(x) = -sen\,\frac{\pi x}{3}$? Quale quello di *sen2x?*

6. Utilizzando il teorema di Rolle, si verifichi che il polinomio $x^n + px + q$ ($p,q \in \Re$), se n è pari ha al più due radici reali, se n è dispari ha al più tre radici reali.

7. Data la funzione

$$f(x) = e^x - senx - 3x$$

calcolarne i limiti per x tendente a $+\infty$ e $-\infty$ e provare che esiste un numero reale α con $0<\alpha<1$ in cui la funzione si annulla.

8. Verificare che la funzione $3x + \log x$ è strettamente crescente. Detta g la funzione inversa, calcolare $g'(3)$.

9. Trovare *f(4)* sapendo che $\int_0^x f(t)dt = x\cos \pi x$

10. Spiegare, con esempi appropriati, la differenza tra *omotetia* e *similitudine* nel piano.

PROBLEMA 1

Due numeri x e y hanno somma e quoziente uguali ad un numero reale *a* non nullo.

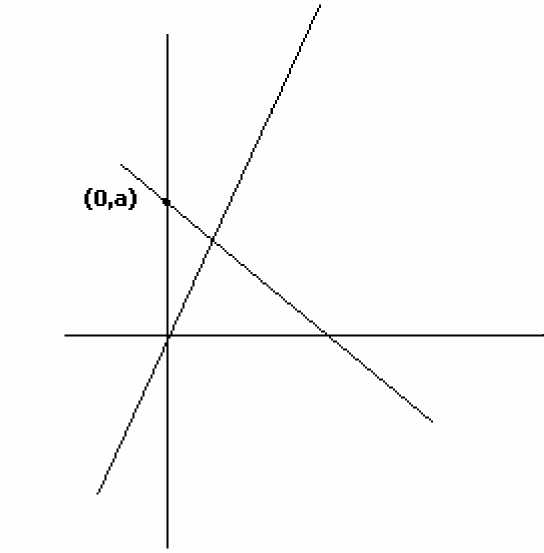
$x+y=a \qquad \frac{x}{y}=a$

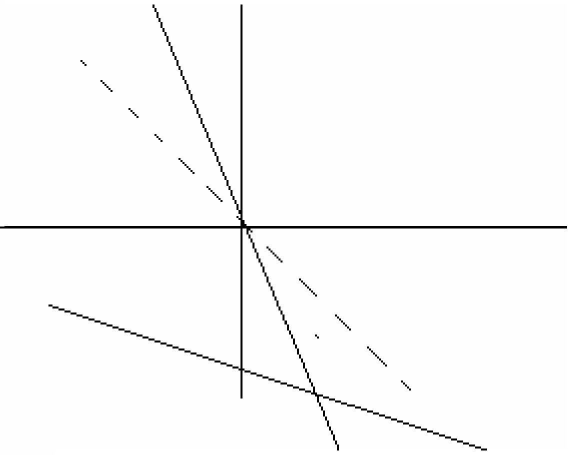
Riferito il piano ad un sistema S di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche (x,y):

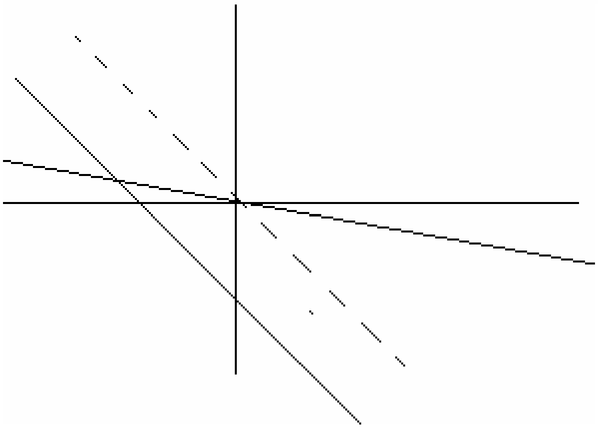
6. si interpreti e discuta il problema graficamente al variare di *a*;

Graficamente il problema corrisponde all'intersezione fascio di rette improprio $y=-x+a$ e del fascio di rette proprio di centro (0,0) $y=ax$

$$\begin{cases} y=-x+a \\ y=\dfrac{x}{a} \end{cases} \qquad \frac{x}{a}+x=a \qquad \begin{cases} x=\dfrac{a^2}{a+1} \\ y=\dfrac{a}{a+1} \end{cases}$$







$a>0$ una soluzione nel I quadrante

$0<a<-1$ una soluzione nel IV quadrante

$a=-1$ nessuna soluzione

$a<-1$ una soluzione ne II quadrante

alla stessa conclusione si arriva anche per via algebrica

dato che

Se $a>0$ $\begin{cases} x=\dfrac{a^2}{a+1}>0 \\ y=\dfrac{a}{a+1}>0 \end{cases}$ $\quad 0<a<-1$ $\begin{cases} x=\dfrac{a^2}{a+1}>0 \\ y=\dfrac{a}{a+1}<0 \end{cases}$ $\quad a<-1$ $\begin{cases} x=\dfrac{a^2}{a+1}<0 \\ y=\dfrac{a}{a+1}>0 \end{cases}$

Ho sempre una soluzione per a≠1 e nessuna soluzione per a=1

7. si trovi l'equazione cartesiana del luogo γ dei punti P(x,y) che soddisfano al problema;

Il luogo si trova eliminando il paramentro a

$\begin{cases} y=-x+a \\ y=\dfrac{x}{a} \end{cases}$ $\begin{cases} y=-x+a \\ a=\dfrac{x}{y} \end{cases}$ $\begin{cases} y=-x+\dfrac{x}{y} \\ a=\dfrac{x}{y} \end{cases}$ da cui $y^2+yx-x=0 \quad x(y-1)=-y^2$

e quindi il luogo $\gamma:\ x=-\dfrac{y^2}{y-1}$.

8. si rappresentino in S sia la curva γ che la curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante;

La trasformazione richiesta è t: $\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$ e quindi considerato t^{-1} : $\begin{cases} x=y' \\ y=x' \end{cases}$ ho che $\gamma':\ y=-\dfrac{x^2}{x-1}$

Studiano e rappresentiamo γ': poi per simmetria rappresentiamo γ:

Studio di $y=-\dfrac{x^2}{x-1}$

C.E. $x\neq 1$

$f(x)>0 \quad x<1$ e $f(x)=0$ per x=0

Intersezione con gli assi: 0(0,0)

	0		1	
-		-		-
+	•	+		+
-		-		+
+	•	+		-

Asintoti:
Verticali x=1
Orizzontali non ne ha dato che ha in numeratore di grado superiore rispetto al denominatore.
Obliquo: $y=-x-1$

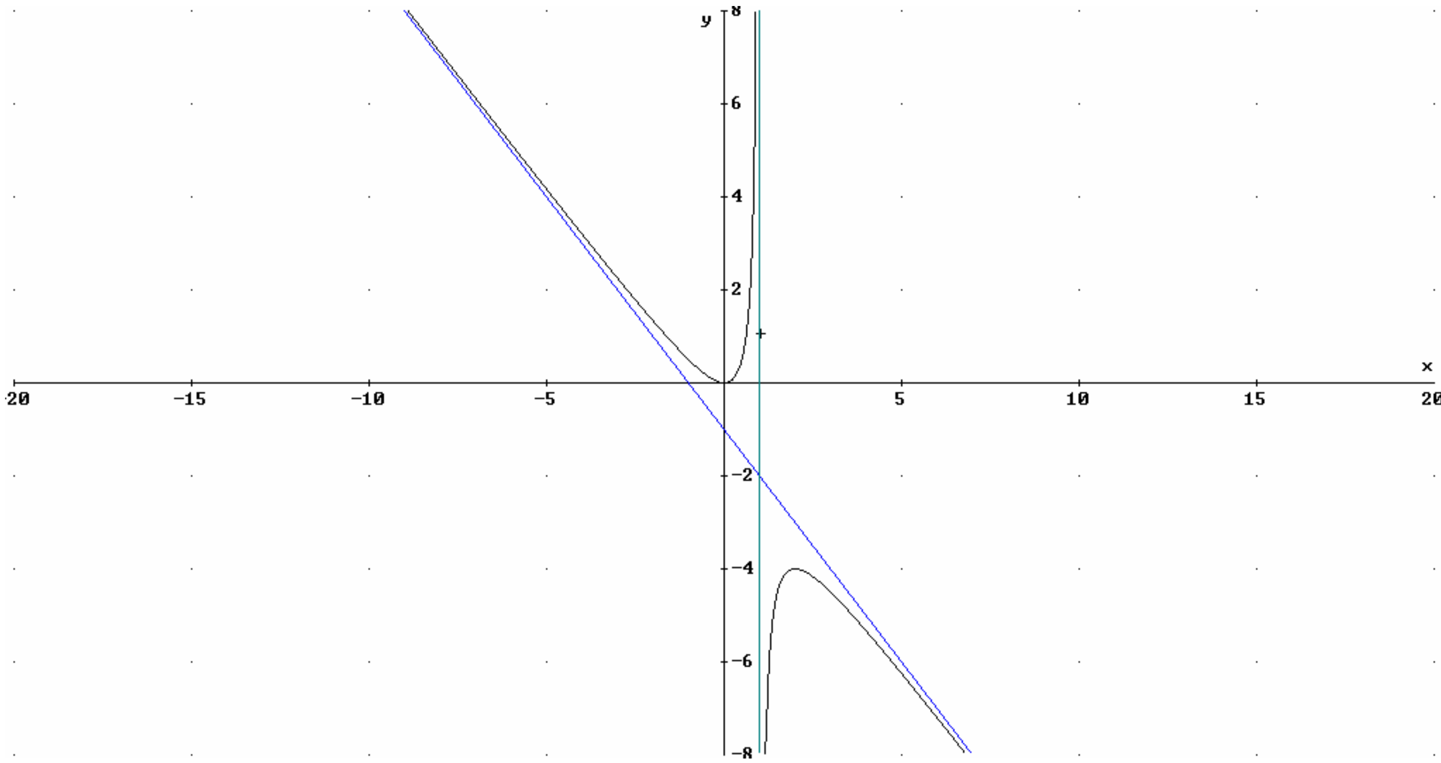
$$m=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x^2}{x(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x^2}{x^2}=-1 \quad q=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x^2}{x-1}+x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+x^2-x}{x-1}=-1$$

Derivata:

$$y'=-\frac{2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\geq 0$$

	0		2	
+		-		+
↗		↘		↗

$Max(0,0)$ e $Min(2,-4)$



Secondo La trasformazione richiesta è t: $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

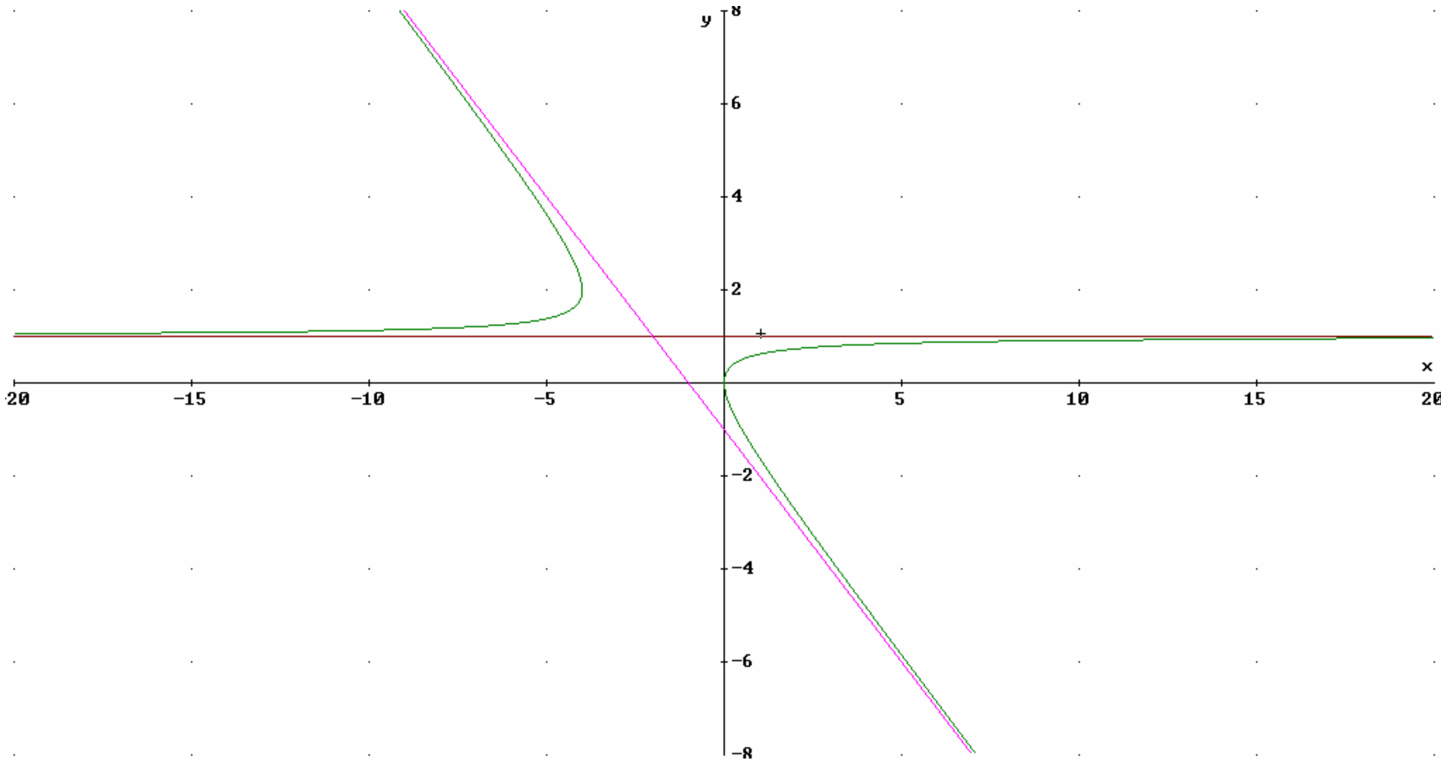
$\gamma:\ x = -\dfrac{y^2}{y-1}$

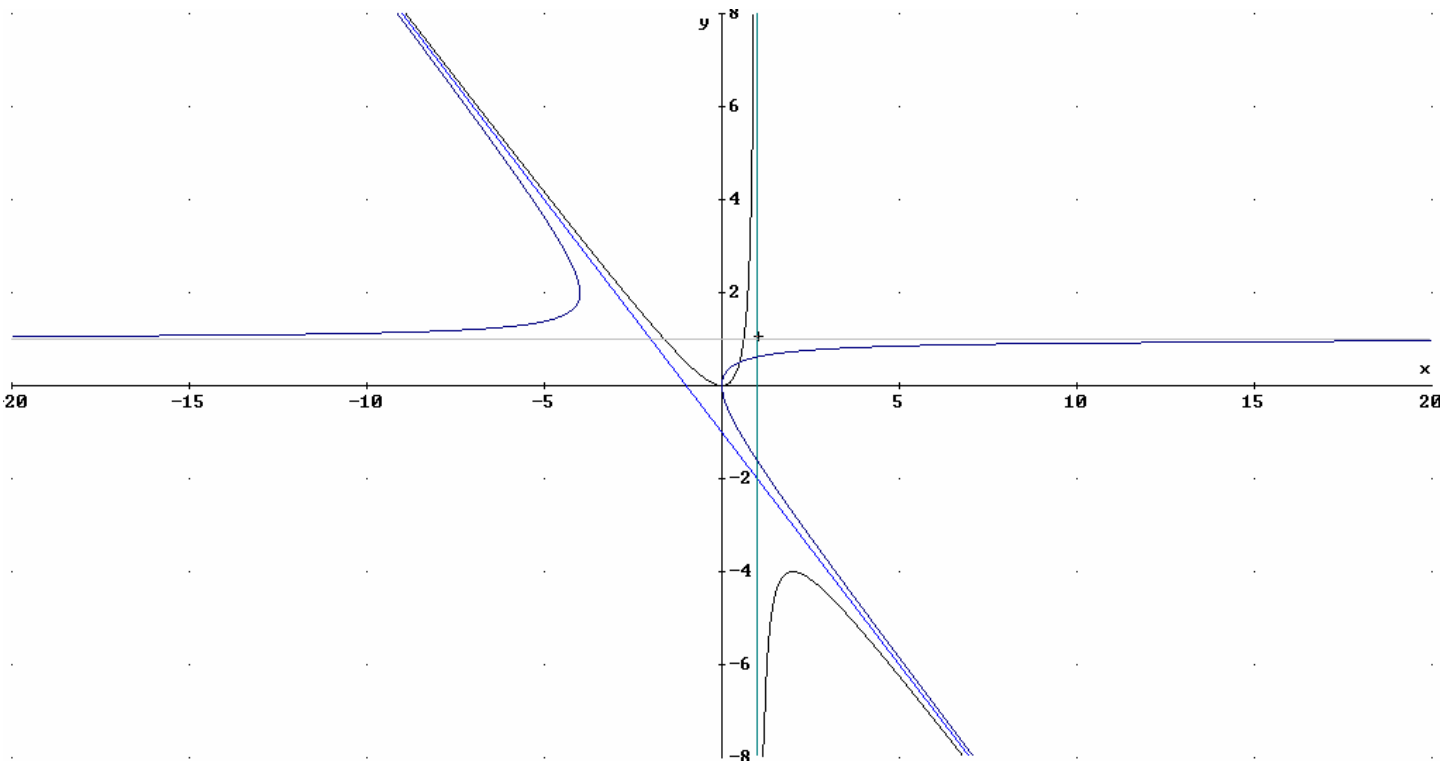
Anche γ: passa per : 0(0,0)

Verticali x=1 secondo la trasformazione t diventa y=1

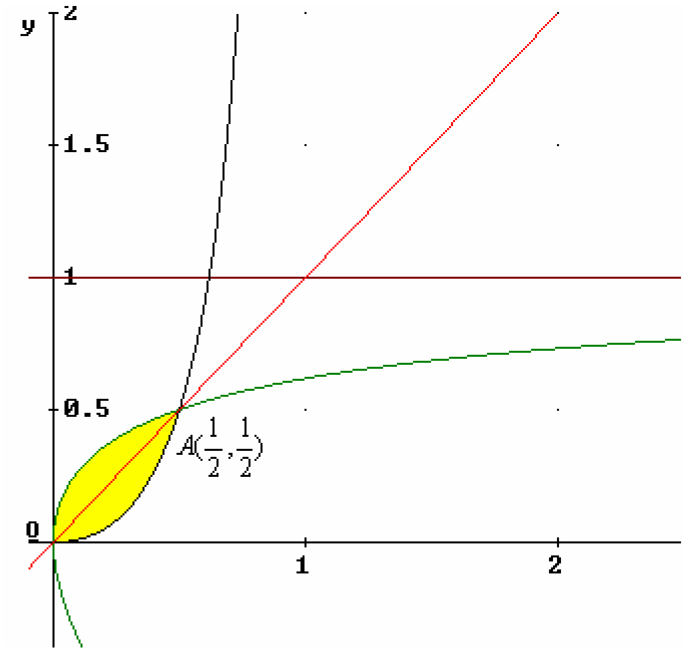
L'asinto Obliquo: rimane $y = -x - 1$

Il punto $Max(0,0)$ si trasforma in se stesso e $Min(2,-4)$ si trasforma in $Min(-4,2)$





9.	si determini l’area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da γ e da γ’ e se ne dia un’approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati;



Le due curve si intersecano in $\begin{cases} y = -\dfrac{x^2}{x-1} \\ y = x \end{cases}$ $\quad x(x-1) = -x^2 \quad 2x^2 - x = 0$ da cui $0(0,0)$ e $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Dato che L'area cercata è simmetrica rispetto a y=x basta che calcolo l'area tra γ e y=x e moltiplico per x

$$I = -2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{x^2}{x-1} \right) dx = -2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2x^2 - x}{x-1} \right) dx$$ calcoliamo la primitiva

$$\begin{array}{llll|l} 2x & -x & +0 & & x-1 \\ \cline{5-5} 2x & +2x & & & 2x+1 \\ \cline{1-2} // & x & +0 & & \\ & x & -1 & & \\ \cline{2-3} & // & 1 & & \end{array}$$

$$\int \frac{2x^2 - x}{x-1} dx = \int (2x+1) dx + \int \frac{1}{x-1} dx = x^2 + x + \ln|x-1|$$ dato che

e quindi $\dfrac{2x^2 - x}{x-1} = 2x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$

$$I = \left| -2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \ln\frac{1}{2} - 0 \right) \right| = \left| -2\frac{3}{4} + 2\ln 2 \right| = \left| -\frac{3}{2} + \ln 4 \right| \approx 0.1137$$

Calcoliamo l'Integrale con il metodo dei trapezi nell'intervallo $[0; 0,5]$ considerando

n=10 e $\Delta = \dfrac{1}{20} = 0,2$ si ha $I = 0,2\left(\dfrac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_{81} + f_9 + \dfrac{f_{10}}{2} \right)$

n	x	fx
0	0	-0
1	0,05	0,094737
2	0,1	0,177778
3	0,15	0,247059
4	0,2	0,3
5	0,25	0,333333
6	0,3	0,342857
7	0,35	0,323077
8	0,4	0,266667
9	0,45	0,163636
10	0,5	2,22E-16

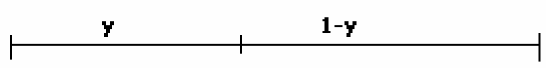
s=	0,112457
S=	0,112457
I=	0,112457

10. si calcoli y nel caso che x sia uguale a 1 e si colga la particolarità del risultato.

$$\begin{cases} y = -1 + a \\ a = \dfrac{1}{y} \end{cases} \qquad y = -1 + \frac{1}{y} \text{ da cui } \quad y^2 + y - 1 = 0 \quad \text{con soluzione } y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

che è la sezione aurea di un segmento uguale a 1.

Infatti $y^2 = 1 - y \quad \dfrac{y}{1} = \dfrac{1-y}{y}$

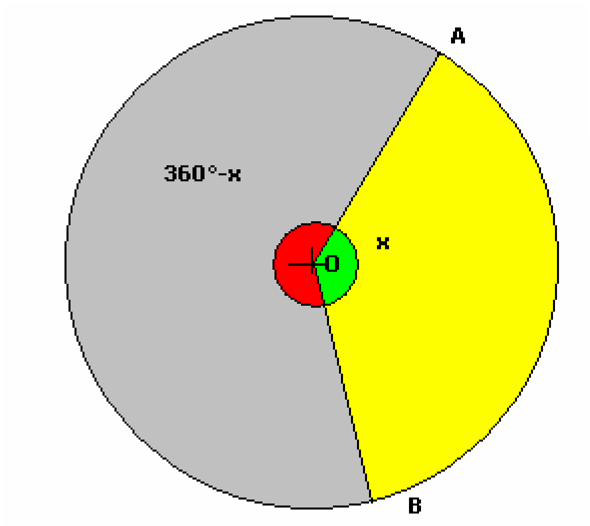


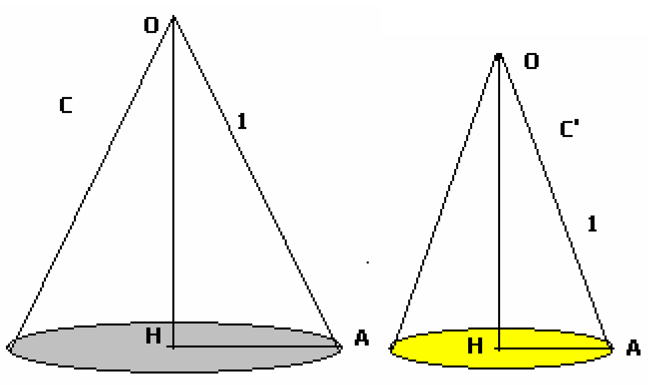
PROBLEMA 2

I raggi *OA = OB = 1 metro* tagliano il cerchio di centro *O* in due settori circolari, ciascuno dei quali costituisce lo sviluppo della superficie laterale di un cono circolare retto.

Si chiede di determinare:

4) il settore circolare (arco, ampiezza e rapporto percentuale con il cerchio) al quale corrisponde il cono C di volume massimo, il valore V di tale volume massimo e il valore V' assunto in questo caso dal volume del secondo cono C';





L'arco è pari a $AB = x$ e $AB = (2\pi - x)$ allora il raggio della prima è $HA = \frac{x}{2\pi}$ e

$$HO = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4\pi^2}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 - x^2}{4\pi^2}} = \frac{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}{2\pi}$$

$$Volume = \frac{1}{3}\pi HA^2 OH = \frac{1}{3}\pi \frac{x^2}{4\pi^2}\frac{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}{2\pi} = \frac{1}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

$$Volume = \frac{1}{24\pi^2}\left(2x\sqrt{4\pi^2 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}\right) = \frac{1}{24\pi^2}\left(\frac{2x\left(4\pi^2 - x^2\right) - x^3}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}\right) = \frac{1}{24\pi^2}\left(\frac{x(8\pi^2 - 3x^2)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}\right)$$

da cui stremanti x=0 $x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}\pi$ e quindi $x = \sqrt{\frac{8}{3}}\pi = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$Volume = \frac{1}{3}\pi HA^2 OH = \frac{1}{24\pi^2}\frac{8}{3}\pi^2\sqrt{4\pi^2 - \frac{8}{3}\pi^2} = \frac{2}{27}\sqrt{3}\pi$$

Arco $x = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ Ampiezza $x = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 294°$ Area settore $Area = \frac{1}{2}\widehat{AB}\cdot r = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$

Rapporto tra aree $Rapporto = \frac{Area - settore}{Area - cerchio} = \frac{\pi\sqrt{\frac{2}{3}}}{\pi} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

. $Volume = \frac{1}{3}\pi HA^2 OH = \frac{2}{27}\sqrt{3}\pi$

5) la capacità complessiva, espressa in litri, di C e di C';

SE per C $x = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ per C' $x = 2\pi - 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} = 2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 2\pi\left(\frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)$ e $HA = \left(\frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)$

E $HO = \sqrt{OA^2 - HA^2} = \sqrt{1 - \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \sqrt{1 - 1 + \frac{2}{3} - 2\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{2}{3} - 2\sqrt{\frac{2}{3}}}$

$$Volume = \frac{1}{3}\pi HA^2 OH = \frac{1}{3}\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\sqrt{\frac{2}{3} - 2\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

6) un'approssimazione della misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura del cono C, specificando il metodo numerico che si utilizza per ottenerla.

L'apertura dell'angolo $A\hat{O}C$ è parti a $AH = 1\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Considero la Funzione $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{6}}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f(x) = \sin x - \frac{\sqrt{6}}{3} = \sin x - 0,8165$ $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$

N.	a	b	m	fa	fb	fm
1	0,785398	1,047198	0,916298	-0,10939	0,049529	-0,02314
2	0,916298	1,047198	0,981748	-0,02314	0,049529	0,014973
3	0,916298	0,981748	0,949023	-0,02314	0,014973	-0,00365

4	0,949023	0,981748	0,965385	-0,00365	0,014973	0,005772
5	0,949023	0,965385	0,957204	-0,00365	0,005772	0,001088
6	0,949023	0,957204	0,953113	-0,00365	0,001088	-0,00127
7	0,953113	0,957204	0,955159	-0,00127	0,001088	-9,1E-05

Sol.= 0,955159

In radianti $x = 0{,}955159$ in gradi decimali $x = \frac{0{,}955159}{\pi}180 = 54{,}726579°$

Quesiti

11. Se a e b sono numeri positivi assegnati quale è la loro media aritmetica? Quale la media geometrica? Quale delle due è più grande? E perché? Come si generalizzano tali medie se i numeri assegnati sono n?

$media/art. = \frac{\mathrm{a+b}}{2}$ $media/geo. = \sqrt{ab}$ $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$ da cui

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ovviamente $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

In generale $\quad media/art. = \dfrac{\sum_{1}^{n} a_i}{n} = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \qquad media/geo. = \sqrt[n]{\prod_{1}^{n} a_i} = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$

12. Il seguente è uno dei celebri problemi del *Cavaliere di Méré (1610 - 1685)*, amico di *Blaise Pascal*: "giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?"

Probabilità di ottenere almeno una volta 1 = Probabilità di non ottenere mai 1

$$p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,5177$$

Probabilità di ottenere almeno una volta un doppo 1 = Probabilità di non ottenere mai un doppo 1

$$p = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,4914$$

13. Assumendo che i risultati - X, 1, 2 - delle 13 partite del Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.

$p = \dfrac{2 \cdot 13}{3^{13}} = \dfrac{26}{3^{13}} = 1,6 \cdot 10^{-5}$, calcolando tale risultato con la distribuzione bernulliana.

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad p(12) = \binom{13}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{13 \cdot 2}{3^{13}}$$

14. Calcolare

$$\lim_{n \mapsto \infty} \frac{3^n}{n!}$$

la successione $\quad \dfrac{3}{1} = 3 \quad \dfrac{3^2}{2} = 4,5 \quad \dfrac{3^3}{6} = 4,5 \quad \dfrac{3^4}{24} = 3,375 \quad \dfrac{3^5}{120} = 2,025$

è descrescente per n>3 infatti $\quad 3^n (n+1)! \geq 3^{n+1} n! \quad \cancel{3^n}\ \cancel{n}!\, n \geq 3 \cdot \cancel{3^n}\ \cancel{n}!$

è decrescente da n=3 in poi. Allora

Se t è il massimo numero per cui $\quad 3^t \leq n$

$$0 < \frac{3^n}{n!} = \frac{3 \cdot 3 \cdots 3}{1 2 3 \cdots n} < \frac{3 \cdot 3}{1 \cdot 2} \frac{3 \cdots 3}{3^2 3^2 \cdots 3^2} \frac{3 \cdots 3}{3^3 3^3 \cdots 3^3} \frac{3 \cdots 3}{3^t 3^t \cdots 3^t} =$$

$$\leq \frac{9}{2} \frac{1}{3 3 \cdots 3} \frac{1}{3^2 3^2 \cdots 3^2} \frac{1}{3^{t-2} 3^{t-2} \cdots 3^{t-2}} =$$

$\leq \dfrac{9}{2} \dfrac{1}{3^{2 \cdot 3^{t-1}}} = 0$ poiché al crescere di n cresce t da cui per il teorema del confronto. $\displaystyle\lim_{n \mapsto \infty} \frac{3^n}{n!} = 0$

15. Cosa si intende per "*funzione periodica*"? Quale è il *periodo* di $f(x) = -sen\,\frac{\pi x}{3}$? Quale quello di *sen2x?*

$$f(x) = f(x+T) \qquad -sen\frac{\pi x}{3} = -sen\frac{\pi}{3}(x+T) = -sen\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{3}T\right) = -sen\left(\frac{\pi}{3}x + 2\pi\right)$$

da cui T=6

$sen2x = sen2(x+T) = sen\left(2x+2T\right) = sen\left(2x+2\pi\right)$ da cui $T = \pi$

16. Utilizzando il teorema di Rolle, si verifichi che il polinomio $x^n + px + q$ ($p,q \in \Re$), se n è pari ha al più due radici reali, se n è dispari ha al più tre radici reali.

Se $f(x) = x^n + px + q$ ho che $f'(x) = nx^{n-1} + p \quad f''(x) = n\cdot(n-1)x^{n-2}$
Se n è pari. n-1 è dispari. Allora se f(x) ha due soluzioni $f'(x) = nx^{n-1} + p$ può avere solo una soluzione e quindi un minino (visto la derivata seconda). Se avesse tre soluzioni distinte $x_1 < x_2 < x_3$ allora per il Teorema di Rolle nell'intervallo $[x_1\ x_2]$ arei una soluzione c per cui f'(c)=0 e $[x_2\ x_3]$ una soluzione b per cui f'(b)=0, il che è assurdo dato che la derivata essendo sempre crescente ammette solo una soluzione.

Se n è dispari. n-1 è pari. Allora se f(x) ha al pui tre soluzioni dato che $f'(x) = nx^{n-1} + p$ può avere solo due soluzioni e quindi un massimo e un minino (visto la derivata seconda). Se avesse quattro soluzioni distinte $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ allora per il Teorema di Rolle nell'intervallo $[x_1\ x_2]$ $[x_2\ x_3]$ $[x_3\ x_4]$ avrei tre soluzioni distinte per cui f'(x)=0 il che è assurdo dato che $f'(x) = nx^{n-1} + p$ è un polinomio pari non può avere soluzioni distinte in un numero dispari.

Esempio: Se $f(x) = x^2 - x - 2$ ho che $f'(x) = 2x - 1 \quad f''(x) = 2$

Esempio: Se $f(x) = x^3 - 3x + 2$ ho che $f'(x) = 3x^2 - 3 \quad f''(x) = 6x$

17. Data la funzione

$$f(x) = e^x - senx - 3x$$

calcolarne i limiti per x tendente a $+\infty$ e $-\infty$ e provare che esiste un numero reale α con $0<\alpha<1$ in cui la funzione si annulla.

$$\lim_{x\to+\infty} e^x - senx - 3x = \frac{e^x}{3x} - \frac{senx}{3x} - 1 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x - senx - 3x = +\infty$$

dato che sinx è una funzione che oscilla tra -1 e 1 .

18. Verificare che la funzione $3x + \log x$ è strettamente crescente. Detta g la funzione inversa, calcolare $g'(3)$.

$f(x) = 3x + \log x \quad f'(x) = 3 + \frac{1}{x}$ che per x>0 è sempre crescente. $f(x) = 3x + \log x$ =3 per x=1

$g(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ da cui $g(3) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{3+\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{3+1} = \dfrac{1}{4}$

19. Trovare *f(4)* sapendo che $\int_0^x f(t)dt = x\cos \pi x$ $f(x) = \left(x\cos \pi x\right)' = \cos \pi x - \pi x \sin \pi x$

$f(4) = \cos 4\pi - 4\pi \sin 4\pi = 1$

20. Spiegare, con esempi appropriati, la differenza tra *omotetia* e *similitudine* nel piano.

Omotetia $o\begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$ Similitudine $s\begin{cases} x' = k(x\cos\alpha - y\sin\alpha) + p \\ y' = k(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + q \end{cases}$

Una similitudine è una affinità che trasforma un segmento AB in un segmento A’B’ tale che $\dfrac{A'B'}{AB} = k$ Un’omotetia è una particolare similitudine tale che un punto unito detto centro e tutte le rette pert il centro sono unite. Una similitudine è composta sempre da un’omotetia e da un isometria