Sessione suppletiva 1999

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

CORSO SPERIMENTALE

Tema di: MATEMATICA

Problema n° 1

Data la funzione *y = f(x)* con $f(x) = \frac{4}{x+k}$ e la funzione *y = g(x)* con $g(x) = x^2 - hx + 4,$ ove *k* e *h* sono due numeri reali,

a. determinare per quali valori di *k* ed *h* è

$$f(1) = g(1)$$
$$f'(1) = g'(1);$$

b. tracciare su esso uno stesso piano di assi cartesiani i grafici delle due funzioni

$y_1 = \frac{4}{x+1}$ e $y_2 = x^2 - 3x + 4;$

c. calcolare l'area della superficie delimitata dalle curve rappresentanti le due funzioni y_1 e y_2.

Soluzione:

$f(x) = \frac{4}{x+k}$ derivata $f'(x) = -\frac{1}{(x+k)^2}$

$g(x) = x^2 - hx + 4,$ derivata $g'(x) = 2x - h$.

poiché $\begin{cases} f(1) = g(1) \\ f'(1) = g'(1); \end{cases}$ a allora $\begin{cases} \dfrac{4}{1+k} = 1^2 - h \cdot 1 + 4 \\ -\dfrac{4}{(1+k)^2} = 2 \cdot 1 - h \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{4}{1+k} = 5 - h \\ -\dfrac{4}{(1+k)^2} = 2 - h \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{4}{1+k} = 5 - h \\ -\dfrac{4}{(1+k)^2} = 2 - h \end{cases}$

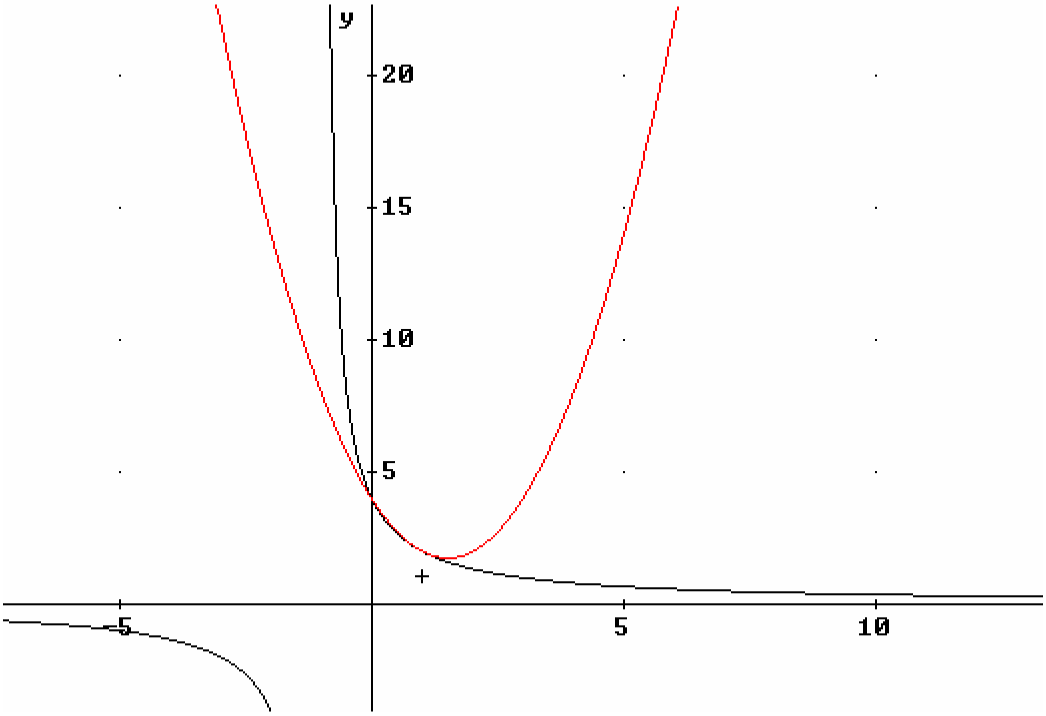
$$\begin{cases} h = 5 - \dfrac{4}{1+k} \\ -\dfrac{4}{(1+k)^2} = 2 - 5 + \dfrac{4}{1+k} \end{cases} \quad \begin{cases} h = 5 - \dfrac{4}{1+k} \\ -\dfrac{4}{(1+k)^2} = -3 + \dfrac{4}{1+k} \end{cases} \quad \begin{cases} h = 5 - \dfrac{4}{1+k} \\ \dfrac{-4 = -3(1+k)^2 + 4(1+k)}{(1+k)^2} \end{cases}$$

$$-4 = -3 - 3k^2 - 6k + 4 + 4k \quad 3k^2 + 2k - 5 = 0 \;\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+15}}{3} = \frac{-1 \pm 4}{3} = \left\langle \begin{matrix} -\dfrac{5}{3} \\ 1 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{cases} h = 5 - \dfrac{4}{2} = 3 \\ k = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} h = 5 - \dfrac{4}{1 - \frac{5}{3}} = 5 - \dfrac{4}{-\frac{2}{3}} = 5 + 6 = 11 \\ k = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

- tracciare su esso uno stesso piano di assi cartesiani i grafici delle due funzioni

$y_1 = \dfrac{4}{x+1}$ e $y_2 = x^2 - 3x + 4;$



$$\begin{cases} y = \dfrac{4}{x+1} \\ y = x^2 - 3x + 4 \end{cases} \quad \text{punti di intersezione} \quad \begin{cases} x^2 - 3x + 4 = \dfrac{4}{x+1} \\ (x^2 - 3x + 4)(x+1) = 4 \end{cases}$$

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$$

calcolare l'area della superficie delimitata dalle curve rappresentanti le due funzioni y_1 e y_2.

Calcolo dell'area

$$\int_0^1 \left(x^2 - 3x + 4 - \frac{4}{x+1} \right) dx = \frac{11}{4} - 4\ln(2)$$

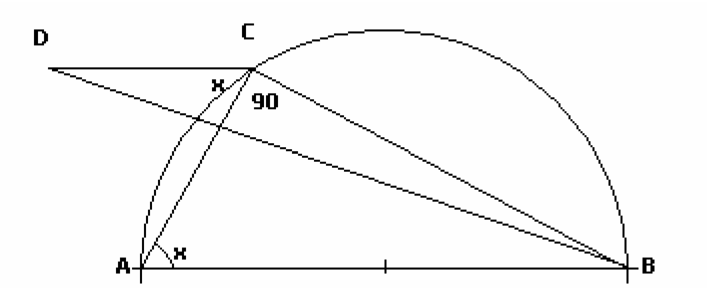
Problema n°2

In una semicirconferenza è inscritto un triangolo rettangolo ABC di base $\overline{AB} = 2$. Si tracci la semiretta parallela alla base AB passante per C e che non interseca la circonferenza. Sia D il punto su tale semiretta per cui è $\overline{CD} = \overline{AC}$.

a. Trovare la funzione *f(x)* che esprime la differenza tra le aree dei triangoli ABC e BCD in funzione dell'angolo $B\hat{A}C = x$.

   Determinare per quale valore dell'angolo $B\hat{A}C = x$ la differenza tra le aree dei triangoli ABC e BCD risulta massima.

b. Calcolare infine l'area delimitata dalla funzione *f(x)* e dall'asse delle ascisse nell'intervallo [0, π /2].



$$A1 = \frac{1}{2} AC \cdot BC \quad A2 = \frac{1}{2} CD \cdot BC \sin(90 + x)$$

$$AC = 2\cos x \quad BC = 2\sin x$$

$$f(x) = A1 - A2 = \frac{1}{2} AC \cdot BC - \frac{1}{2} DC \cdot BC \sin(90 + x) = \frac{1}{2} BC \cdot AC (1 - \sin(90 + x))$$

$$f(x) = \frac{1}{2} 2\sin x \cdot 2\cos x (1 - \cos x) = \sin 2x (1 - \cos x)$$

a. Rappresentare il grafico della funzione $y = f(x)$ con

   $y = \text{sen}\, 2x (1 - \cos x)$

   nell'intervallo [0, 2π].

$$f(x) = \frac{1}{2} 2\sin x \cdot 2\cos x (1 - \cos x) = \sin 2x (1 - \cos x)$$

x =-0.43 $\vee$ x = 0.77

$$\sin 2x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq 2x \leq \pi \vee 2\pi \leq 2x \leq 3\pi \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \vee \pi \leq 2x \leq \frac{3}{2}\pi$$

$$(1-\cos x) > 0 \Rightarrow \textit{sempre}, \quad (1-\cos x) = 0 \Rightarrow \textit{per } x = 0$$

$$f'(x) = 2\sin x \cos(1-\cos x) = 2(\sin x \cos x - \sin x \cos^2 x)$$

$$f'(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^3 x + 2\cos x \sin^2 x)$$

$$f'(x) = 2(-1+\cos^2 x + \cos^2 x - \cos^3 x + 2\cos x(1-\cos^2 x))$$

$$f'(x) = 2(2\cos^2 x - 1 + 2\cos x - 3\cos^3 x)$$

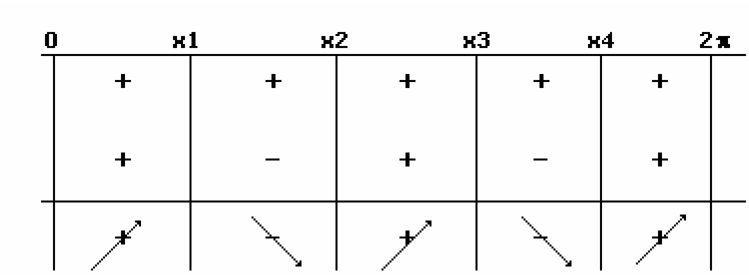
$$f'(x) = 2(1-\cos x)(3\cos^2 x + \cos x - 1) \geq 0$$

$$\begin{cases} 1-\cos x \geq 0 \\ 3\cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 \geq \cos x \\ 3\cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$\begin{cases} \textit{sempre} \quad \textit{positivo} \quad \textit{con} \quad f(x) = 0 \ \textit{per } x = 0 \\ \cos x \leq \frac{-1-\sqrt{13}}{6} \simeq \text{-0.76} \ \vee \cos x \geq \frac{-1+\sqrt{13}}{6} \simeq 0.43 \end{cases}$$ da cui

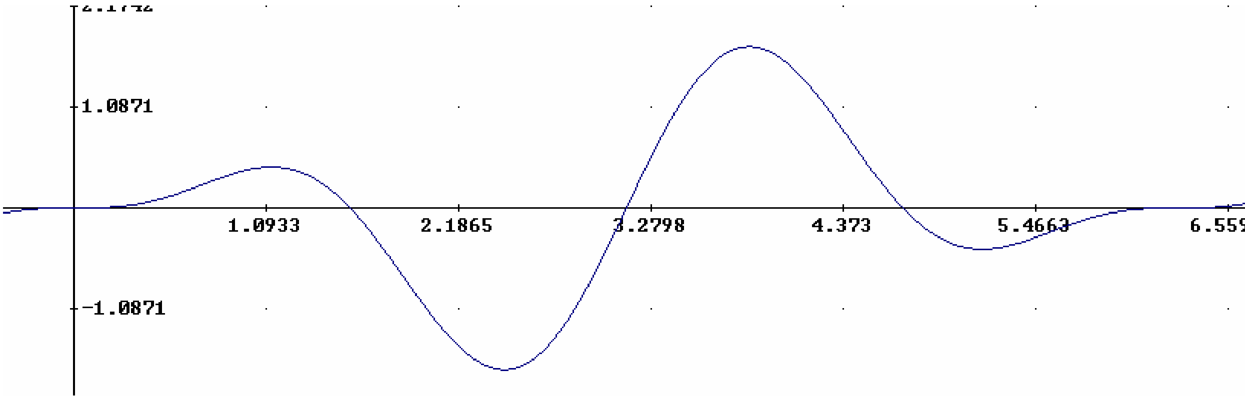
$$\begin{cases} \cos x = 0,43 \Rightarrow x = 64,5° \vee 295,5° - x1 = 1,12 \vee x2 = 5,16 \\ \cos x = -0,76 \Rightarrow x = 40° \vee 320° - x3 = 2,44 \vee x4 = 3,84 \end{cases}$$



Massimi per $Max(1{,}12, \simeq 0.44)$ $Max(5{,}16; \simeq -0.44)$

Minimi per $Min(2,44, \simeq -1.74)$ $Min(3,84, \simeq 1.74)$

Flesso per $Flesso(0,0)$ $Flesso(2\pi, 0)$



Determinare per quale valore dell'angolo $B\hat{A}C = x$ la differenza tra le aree dei triangoli ABC e BCD risulta massima.

a. Calcolare infine l'area delimitata dalla funzione *f(x)* e dall'asse delle ascisse nell'intervallo [0, π /2].

$$\int_0^{\pi/2} \sin 2x(1-\cos x)dx = \frac{1}{3}$$

Primitiva

$$\int \sin 2x(1-\cos x)dx = \int \sin 2xdx - 2\int \sin x \cos^2 xdx = -\frac{\cos 2x}{2} + 2\int \cos^2 xd\cos x =$$

$$= -\frac{\cos 2x}{2} + \frac{2}{3}\cos^3 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Problema n°3

3. Una ditta dispone di 10 linee telefoniche. La probabilità, in un istante qualsiasi, che una data linea sia occupata è 1/5. Determinato il numero medio di linee telefoniche libere, calcolare per ogni istante – con due cifre significative – la probabilità che:

a. tutte le linee siano occupate,
b. almeno una linea sia libera,
c. almeno una linea sia occupata,
d. esattamente due linee siano libere.

a. tutte le linee siano occupate,

$$p=\left(\frac{1}{5}\right)^{10}=1,02\cdot 10^{-7}$$

b. almeno una linea sia libera,

A=" almeno una linea sia libera"

B="tutte le linee sono occupate"

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(B)=1-1,02\cdot 10^{-7}=1$$

c. almeno una linea sia occupata,

A=" almeno una linea sia occupata"

B="tutte le linee sono libere"

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(B)=1-\frac{4^{10}}{5^{10}}=1-1{,}07\text{E-01}=8{,}93\text{E-01}$$

4. esattamente due linee siano libere.

La probabilità per esempio che la prima e la seconda siano libere è

$p=\left(\frac{4}{5}\right)^{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{8}$ per tutte le coppie libere su 10 linee $\binom{10}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{8}$ da cui

$$p=\binom{10}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{8}=45\cdot 0,64\cdot 0{,}00000256=0{,}000073728=7{,}4\cdot 10^{-5}$$