A. S. 1999/2000

BRST - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Indirizzo: SCIENTIFICO TECNOLOGICO – Progetto "BROCCA"

CORSO SPERIMENTALE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1. Sia f(x) una funzione reale di variabile reale tale che valgano le seguenti condizioni:

$$f(x_0) > 0, \quad f'(x_0) > 0, \quad f''(x_0) = 0,$$

dove x_0 è un particolare valore reale.

a) Spiegare perché tali condizioni non sono sufficienti a determinare l'andamento di f(x) in un intorno di x_0.

Tali condizioni non sono sufficienti perché non sappiamo se in $f''(x_0) = 0$, c'è un flesso o la concavità verso l'alto, questo me lo dice la derivata terza. Infatti:

Se $f''(x_0) = 0$ e se $f'''(x_0) \neq 0$, ho un flesso

Se $f''(x_0) = 0$ e se $f'''(x_0) = 0$, $f^{IV}(x_0) \neq 0$, ho la concavità verso l'alto o verso il basso.

b) Trovare almeno tre funzioni polinomiali f(x), di grado superiore al 1°, aventi andamenti diversi in $x_0 = 0$, tali che:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0.$$

$$1)\ y = \frac{x^3}{3} + x + 1 \quad y' = x^2 + 1 \quad y'' = 2x$$

$$2)\ y = \frac{x^4}{4} + x + 1 \quad y' = x^3 + 1 \quad y'' = 3x^2$$

$$3)\ y = \frac{x^5}{5} + x + 1 \quad y' = x^4 + 1 \quad y'' = 4x^3$$

c) Determinare, se possibile, tutte le rette tangenti ai grafici delle funzioni trovate e parallele alla retta di equazione y = x + 1.

1) $y' = x^2 + 1 = 1$ da cui solo per $x = 0$ e allora $y - f(x_0) = f(x_0)(x - x_0)$ da cui

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \quad y = x + 1$$

2) $y' = x^3 + 1 = 1$ da cui solo per $x = 0$ e allora $y - f(x_0) = f(x_0)(x - x_0)$ da cui

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \quad y = x + 1$$

3) $y' = x^4 + 1 = 1$ da cui solo per $x = 0$ e allora $y - f(x_0) = f(x_0)(x - x_0)$ da cui

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \quad y = x + 1$$

d) A completamento del problema dimostrare la formula che esprime la derivata, rispetto ad x, della funzione x^n, dove n è un intero qualsiasi non nullo.

Si può dimostra per induzione:

per n=0 $y = x^0 = 1 \quad y' = 0$

per n=1 $y = x^1 \quad y' = 1x^0 = x$

per n=2 $y = x^2 \quad y' = 2x$

Supposto vero per n-1 dimostriamolo per n

$y = x^n = x \cdot x^{n-1}$ ho che (proprietà della moltiplicazione)

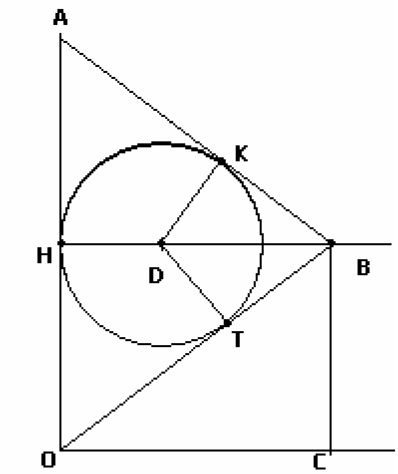
$$y' = x^{n-1} + x((n-1)x^{n-2}) = x^{n-1} + (n-1)x^{n-1} = nx^{n-1}$$

oppure con il rapporto incrementale $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{nhx^{n-1}}{h} = nx^{n-1}$

considerando che $(x+h)^n = x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} nh^2 x^{n-2} + .. + nxh^{n-1} + h^n$ e quindi tutti i termini h superiore al secondo grado vanno a zero

2. Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti: A(0, 2), B(1, 1), C(1, 0).

a) Trovare l'equazione della circonferenza γ inscritta nel triangolo OAB.



La circonferenza deve essere tangente ai lati dei triangolo OAB. Allora per simmetria, dato che il triangolo è isoscele ha l'ordinata del centro uguale a 1. allora $D(\alpha, \beta) = D(\alpha, 1)$

Per determinare α imponiamo che $DH = DT$ (raggi della circonferenza) inoltre osserviamo che $DH = \alpha$ e che la retta per OB ha equazione $y = x$ Allora $DH = \alpha = \frac{|y - x|}{\sqrt{2}} = DT$ da cui $\frac{|1-\alpha|}{\sqrt{2}} = \alpha$

Risolvendo $|1-\alpha| = \sqrt{2}\alpha$ da cui $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$ e $\alpha = \frac{1}{1-\sqrt{2}}$ che è negativa e si scarta.

La circonferenza è allora $(x - \sqrt{2} + 1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2} - 1)^2$

b) Determinare le equazioni dell'affinità α che ha come punti uniti i punti O e C e trasforma il punto B nel punto A.

$$t:\begin{cases} x'=ax+by+p \\ y'=cx+dy+q \end{cases}$$

$O(0,0)\to O(0,0) \quad t:\begin{cases} 0=p \\ 0=q \end{cases}$ da cui p=0 e q=0

$C(1,0)\to C(1,0) \quad t:\begin{cases} 1=1a+0b \\ 0=1c+0y \end{cases}$ da cui a=1 e c=0

$B(1,1)\to A(0,2) \quad t:\begin{cases} 0=1+b \\ 2=1d \end{cases}$ da cui b=-1 e d=2

allora $t:\begin{cases} x'=x-y \\ y'=2y \end{cases}$

c) Calcolare l'area del triangolo CAA', dove A' è il punto trasformato di A nell'affinità α.

A' ha coordinate $t(A):\begin{cases} x'=0-2=-2 \\ y'=2\cdot 2=4 \end{cases}$

$$Area=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A-x_C & y_A-y_C \\ x_{A'}-x_C & y_{A'}-y_C \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0-1 & 2-0 \\ -2-1 & 4-0 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(-4+6)=1$$

d) Stabilire se l'affinità α ha altri punti uniti, oltre ad O e C, e trovare le sue rette unite.

$$t:\begin{cases} x'=x-y \\ y'=2y \end{cases}$$

$t:\begin{cases} x=x-y \\ y=2y \end{cases} \quad t:\begin{cases} y=0 \\ y=0 \end{cases}$ otteniamo una rette di punti uniti

$ax'+by'+c=0$ si trasforma in $a(x-y)+2by+c=0$ e quindi $ax+(2b-a)y+c=0$

le due rette saranno unite quando $\frac{a}{a}=\frac{2b-a}{b}=\frac{c}{c}$ dalla seconda otteniamo che b=a e allora sono unite le rette

$ax+ay+c=0$ ovvero $x+y+\frac{c}{a}=x+y+k=0$

e) Stabilire quali, fra le rette unite trovate, risultano tangenti o esterne a γ .

La retta y=0 è sicuramente esterna a γ . in vece le rette unite saranno secanti, tangenti o esterne a seconda che la distanza dal centro sia minore , uguale o maggiore del raggio.

$$d=\frac{|x+y+k|}{\sqrt{2}}=\frac{|\sqrt{2}-1+1+k|}{\sqrt{2}}=\frac{|\sqrt{2}+k|}{\sqrt{2}}\geq\sqrt{2}-1 \qquad |\sqrt{2}+k|\geq 2-\sqrt{2}$$

$\sqrt{2}+k\leq -2+\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}+k\geq 2-\sqrt{2}$ e quindi soluzioni $k\leq -2$ e $k\geq 2-2\sqrt{2}$

3. Assegnata la funzione:

$$f(x) = a\log^2 x + b\log x$$

dove il logaritmo si intende in base *e*, il candidato:

a) determini per quali valori di *a* e *b* la f(x) ha un minimo relativo nel punto $(\sqrt{e}; -\frac{1}{4})$;

$$\begin{cases} f(x) = a\log^2 x + b\log x \\ f'(x) = \dfrac{2a\log x}{x} + \dfrac{b}{x} \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} -\dfrac{1}{4} = a\log^2\sqrt{e} + b\log\sqrt{e} \\ 0 = \dfrac{2a\log\sqrt{e} + b}{\sqrt{e}} \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} -\dfrac{1}{4} = a\dfrac{1}{4} + b\dfrac{1}{2} \\ 0 = a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = a + 2b \\ 0 = a + b \end{cases} \quad \begin{cases} -1 = -b + 2b \\ a = -b \end{cases} \quad \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

b) disegni la curva grafico della f(x) per i valori di *a* e di *b* così ottenuti e calcoli l'area della regione finita da essa delimitata con l'asse x.

$f(x) = \log^2 x - \log x$

Campo di esistenza x>0

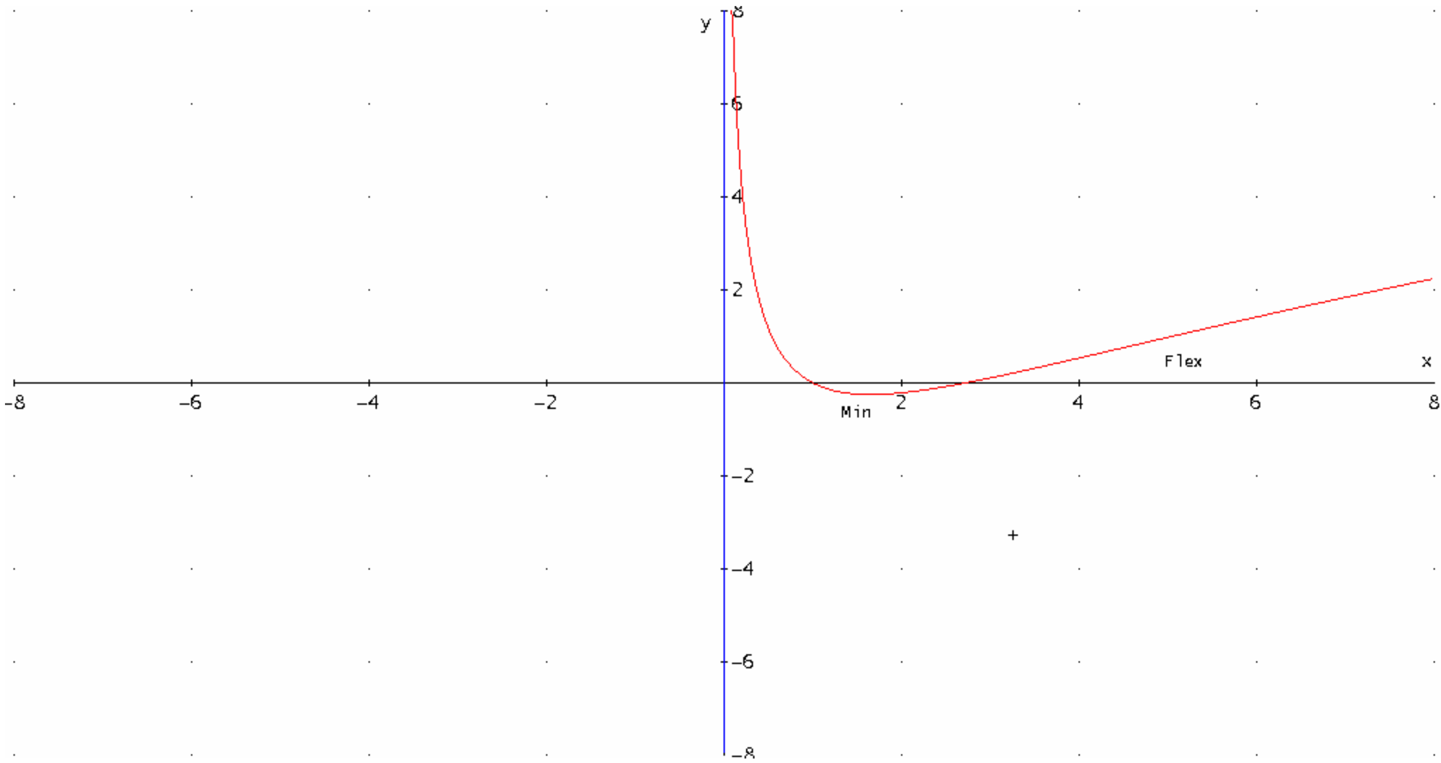
Positività $f(x) = \log^2 x - \log x \geq 0$ da cui $\log x \leq 0 \vee \log x \geq 1$ da cui $x \leq 1 \vee x \geq e$

$\lim\limits_{x\to 0} \log^2 x - \log x = \infty + \infty = +\infty$ x=0 asintoto orizzontale

$\lim\limits_{x\to +\infty} \log^2 x - \log x = \infty - \infty = +\infty$ scartando i termini di grado inferiore

$f'(x) = \dfrac{2\log x - 1}{x} \quad \log x \geq \dfrac{1}{2} \quad x \geq e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ minimo.

$f''(x) = \dfrac{\frac{2}{x}x - (2\log x - 1)}{x^2} = \dfrac{-2\log x + 3}{x^2} \geq 0$ da cui $\log x \leq \dfrac{3}{2} \quad x \leq e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3}$ concavità positiva e flesso per $x = \sqrt{e^3} \quad f(x) = \dfrac{9}{4} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{4}$



Abbiamo già visto che interseca l'asse x in 1 e in e.

Allora l'area richiesta è $\int_1^e \log^2 x - \log x dx$

$$\int \log^2 x dx = x\log^2 x - \int 2\log x \frac{1}{x} x dx = x\log^2 x - 2\int \log x dx$$

$$\int \log x dx = x\log x - \int \frac{1}{x} x dx = x\log x - x$$

allora

$$\int \log^2 x dx - \int \log x dx = x\log^2 x - 3\int \log x dx = x\log^2 x - 3(x\log x - x)$$

$$\int_1^e \log^2 x - \log x dx = x\log^2 x - 3(x\log x - x)\Big|_1^e = e - 3(e-e) - (0+3) = -3 + e$$

e siccome è negativa l'integrale vale $I = e - 3$

Calcoli infine la probabilità che lanciando un dado cinque volte, esca per tre volte lo stesso numero.

Se un evento ha probabilità p e devo calcolare la propabilità che quell'evento accada k volte su un n possibilità si usa la seguente formula

$p(E) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Se per esempio devo calcolare la probabilità che esce 1 tre volte su 5 lanci. Considero che la probabilità che esce 1 è $\frac{1}{6}$ allora $p(E) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 (1-\frac{1}{6})^2 = \binom{5}{3}\frac{5^2}{6^5}$

siccome per avere la propabilità rischesta devo moltiplicare per 6.

$$p(E) = 6\binom{5}{3}\frac{5^2}{6^5}$$