A. S. 2000/2001

Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Tema di: MATEMATICA

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario.

PROBLEMA 1

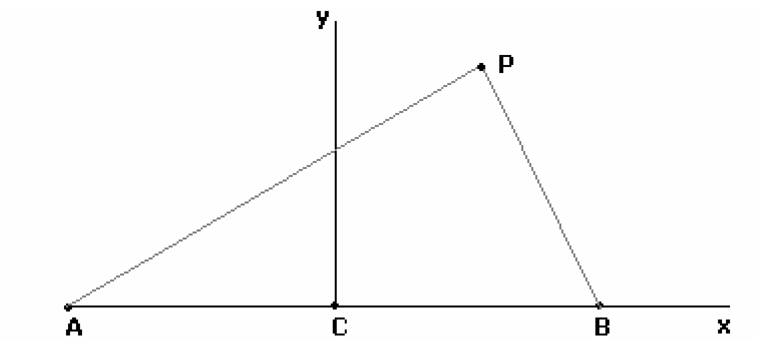
Sia *AB* un segmento di lunghezza *2a* e *C* il suo punto medio.
Fissato un conveniente sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche *(x, y)*:

a) si verifichi che il luogo dei punti *P* tali che $\frac{PA}{PB} = k$ (*k* costante positiva assegnata) è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di *k* per cui la soluzione degenera in una retta;

b) si determini il luogo geometrico γ dei punti *X* che vedono *AC* sotto un angolo di 45°;

c) posto X, appartenente a γ , in uno dei due semipiani di origine la retta per A e per B e indicato con α l'angolo $X\hat{A}C$ si illustri l'andamento della funzione $y = f(x)$ con $f(x) = (XB / XA)^2$ e $x = tg\alpha$.

Soluzione problema 1:



Posto il sistema di assi in modo che AB coincida con l'asse x e l'asse y passi per C.
Si ha che A(-a,0) C(0,0) e B(a,0). Da cui

$$PA = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \qquad PB = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \text{ da cui } \frac{PA}{PB} = \frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = k \text{ da cui}$$

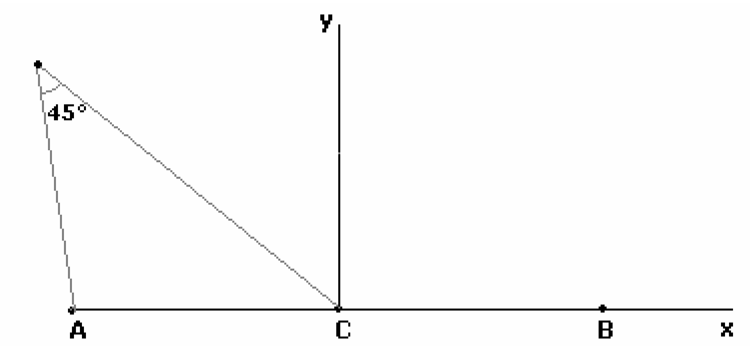
$$(x+a)^2 + y^2 = k^2\left[(x-a)^2 + y^2\right] \text{ e quindi } x^2 + a^2 + 2ax + y^2 = k^2x^2 + k^2a^2 - 2k^2ax + k^2y^2$$

$$(k^2-1)x^2 + (k^2-1)y^2 - 2a(1+k^2)x + (k^2-1)a^2 = 0 \qquad x^2 + y^2 - 2a\frac{(1+k^2)}{(k^2-1)}x + a^2 = 0$$

il valore degenere è per k=1 e la retta diventa $x = 0$ circonferenza di centro $Centro\left(a\frac{(1+k^2)}{(k^2-1)}, 0\right)$

e raggio

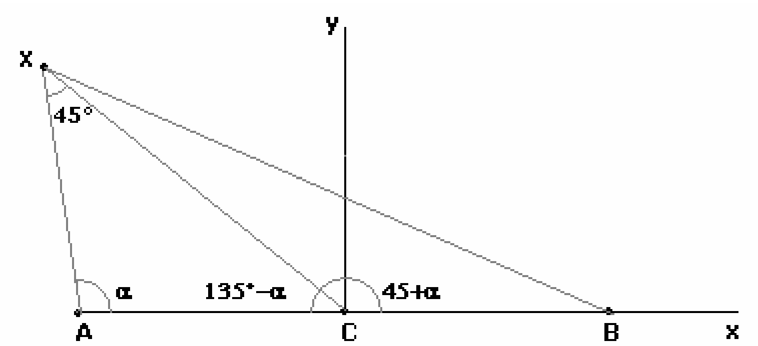
$$raggio=\sqrt{a^2\frac{(1+k^2)^2}{(k^2-1)^2}-a^2}=a\sqrt{\frac{1+k^4+2k^2}{1+k^4-2k^2}-1}=a\sqrt{\frac{4k^2}{1+k^4-2k^2}}=\frac{2ak}{k^2-1}$$



Le rette per c hanno equazione $y=mx$ le rette per A hanno equazione $y=m'(x-a)$

Poiché $tg\alpha=tg45°=1=\frac{|m-m'|}{1+mm'}$ da cui $1=\frac{\left|\frac{y}{x}-\frac{y}{x-a}\right|}{1+\frac{y}{x}\frac{y}{x-a}}$ da cui $1=\frac{\left|\frac{y(x-a)-xy}{x^2-ax}\right|}{\frac{x^2-ax+y^2}{x^2-ax}}$ da cui

$1=\frac{|-ay|}{x^2-ax+y^2}$ da cui $x^2+y^2-ax-|ay|=0$ Circonferenze di centro $Centro\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$ e $Centro\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ e raggio $raggio=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}=a\frac{\sqrt{2}}{2}$



Osservando la figura sopra abbiamo che (Teorema dei seni) $\frac{XA}{\sin(45+\alpha)}=\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ da cui

$XA=a\sqrt{2}\sin(45+\alpha)$ e $\frac{XC}{\sin\alpha}=\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ da cui $XC=a\sqrt{2}\sin\alpha$

Per il teorema di Carnot applicato A XCB abbiamo che

$$XB^2=XC^2+CB^2-2XC\cdot CB\cos(45+\alpha)=2a^2\sin^2\alpha+a^2-2\sqrt{2}a^2\sin\alpha\cos(45+\alpha)$$

e quindi $f(x)=\frac{XB^2}{XA^2}=\frac{2a^2\sin^2\alpha+a^2-2\sqrt{2}a^2\sin\alpha\cos(45+\alpha)}{2a^2\sin^2(45+\alpha)}=$

$$f(x)=\frac{2a^2\sin^2\alpha+a^2-2\sqrt{2}a^2\sin\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)}{2a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)^2}$$

$$f(x)=\frac{2a^2\sin^2\alpha+a^2-2a^2\sin\alpha\cos\alpha+2a^2\sin^2\alpha}{2a^2\frac{1}{2}\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha\right)}=\frac{a^2\left(4\sin^2\alpha-2a^2\sin\alpha\cos\alpha+1\right)}{a^2\left(1+2\sin\alpha\cos\alpha\right)}$$

dividendo sopra e sotto per $\cos^2\alpha$ e considerando che $tg\alpha=x$ abbiamo che

$$f(x)=\frac{4tg^2\alpha-2tg\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}+2tg\alpha}=\frac{4tg^2\alpha-2tg\alpha+1+tg^2\alpha}{tg^2\alpha+2tg\alpha+1}=\frac{5tg^2\alpha-2tg\alpha+1}{(tg\alpha+1)^2}$$

$$f(x)=\frac{5x^2-2x+1}{(x+1)^2}$$

C.E. $x\neq-1$

Positività $f(x)=\frac{5x^2-2x+1}{(x+1)^2}\geq 0$ per $5x^2-2x+1\geq 0$ sempre positiva e mai nulla

$A(0,1)$

$\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-2x+1}{(x+1)^2}=\infty$ AV x=1 $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-2x+1}{(x+1)^2}=5$ AO y=5

Derivata

$$f'(x)=\frac{\left(10x-2\right)(x+1)^2-2(x+1)(5x^2-2x+1)}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)\left(10x^2+10x-2x-2-10x^2+4x-2\right)}{(x+1)^4}$$

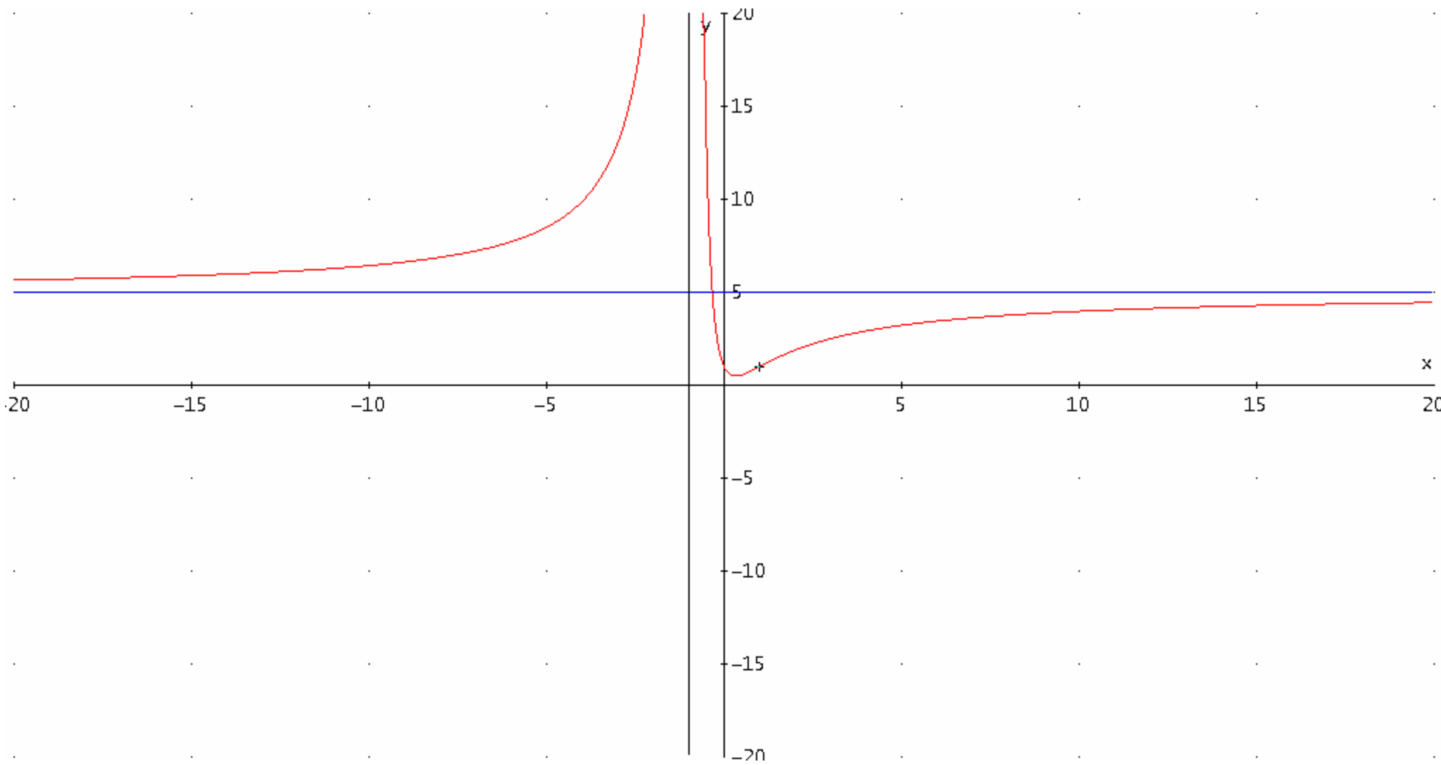
$$f'(x)=\frac{(x+1)\left(12x-4\right)}{(x+1)^4}=\frac{4(x+1)\left(3x-1\right)}{(x+1)^4}$$

	-1	1/3
-	+	+
-	-	+
↗	↘	↗

$Min(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$

Intersezione con i propri asintoti $\frac{5x^2-2x+1}{(x+1)^2}=5$ da cui $5x^2-2x+1=5x^2+10x+5$ da cui

$8x+4=0$ $x=-\frac{1}{2}$



PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y), è assegnata la funzione:

$$y = x^2 + a\log(x+b)$$

con *a* e *b* diversi da zero.

a) si trovino i valori di *a* e *b* tali che la curva Γ grafico della funzione passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in *x=1*;

b) si studi e si disegni Γ;

c) si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione della intersezione positiva di Γ con l'asse x;

d) si determini l'equazione della curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta *y = y(1)*;

e) si disegni, per i valori di *a* e *b* trovati, il grafico di:

$$y = \left|x^2 + a\log(x+b)\right|$$

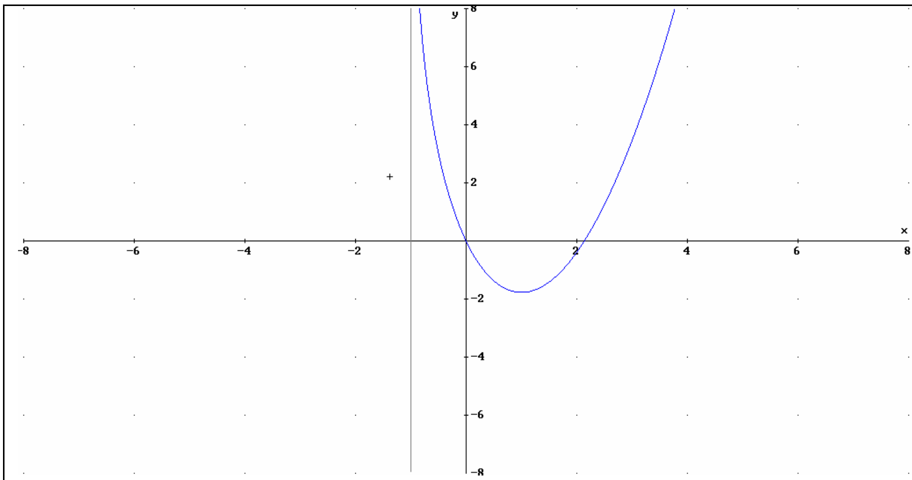
Problema 2

Nel piano è assegnata la funzione $f(x) = x^2 + a\log(x+b)$ con a e b diversi da zero.

a) si trovino i valori di a e b che la curva Γ grafico della funzione passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in x=1.

$$\begin{cases} f(0) = 0^2 + a\log(0+b) = 0 \\ f'(1) = 2\cdot 1 + \dfrac{a}{1+b} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a\log(b) = 0 \\ 2 + \dfrac{a}{1+b} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 1 \\ 2 + \dfrac{a}{1+1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 1 \\ a = -4 \end{cases}$$

b) Si studi e si disegni Γ



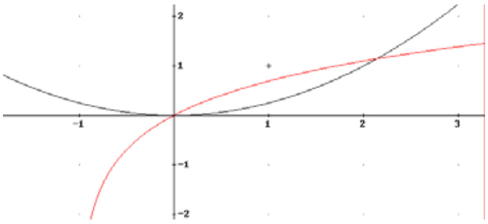
$f(x) = x^2 - 4\log(x+1)$

C.E. x>-1

A.V. x=-1

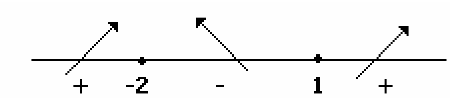
Positività o intersezione con gli assi. Come si deve $x^2 - 4\log(x+1) \geq 0$ non è una disequazione tipica.

Allora cerco valori approssimati. $x^2 \geq 4\log(x+1)$ da cui $\frac{x^2}{4} \geq \log(x+1)$. Cerco di vedere quando la



parabola $\frac{x^2}{4}$ è maggiore del logaritmo $\log(x+1)$ Allora un valore è 0 e l'altro è un valore prossimo a 2. (poiché $\frac{2^2}{4} = 1$ e ln(2+1)=1,098). In ogni caso posso saltare questo passo e rispondere in seguito dopo aver disegnato il grafico.

$f'(x) = 2x - \frac{4}{x+1} = \frac{2x^2 + 2x - 4}{x+1} = \frac{2(x^2 + x - 2)}{x+1} = \frac{2(x-1)(x+2)}{x+1} \geq 0$ Minimo per (1,1-ln16) -(1,-1,77)



il limite della derivata prima tende all'inifinto (quindi non mi aspetto flessi).

$f''(x) = 2\frac{(2x+1)(x+1) - (x^2 + x - 2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} \geq 0$ sempre positivo. Concavità sempre verso l'altro

c) Si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati un'approssimazione della intersezione della intersezione positiva di Γ con l'asse.

Occorre trovare due valori a e b per cui f(a)f(b)<0. Dal grafico a=1 e b=3 . f(1)=-1,77 f(3)=3,45

n	a	b	c	fa	fb	fc	fa*fc
0	1	3	2	-1,77259	3,454823	-0,39445	0,699196
1	2	3	2,5	-0,39445	3,454823	1,238948	-0,4887
2	2	2,5	2,25	-0,39445	1,238948	0,34788	-0,13722
3	2	2,25	2,125	-0,39445	0,34788	-0,04211	0,016611
4	2,125	2,25	2,1875	-0,04211	0,34788	0,148209	-0,00624
5	2,125	2,1875	2,15625	-0,04211	0,148209	0,051876	-0,00218

6	2,125	2,15625	2,140625	-0,04211	0,051876	0,004588	-0,00019

Soluzione circa x= 2,14

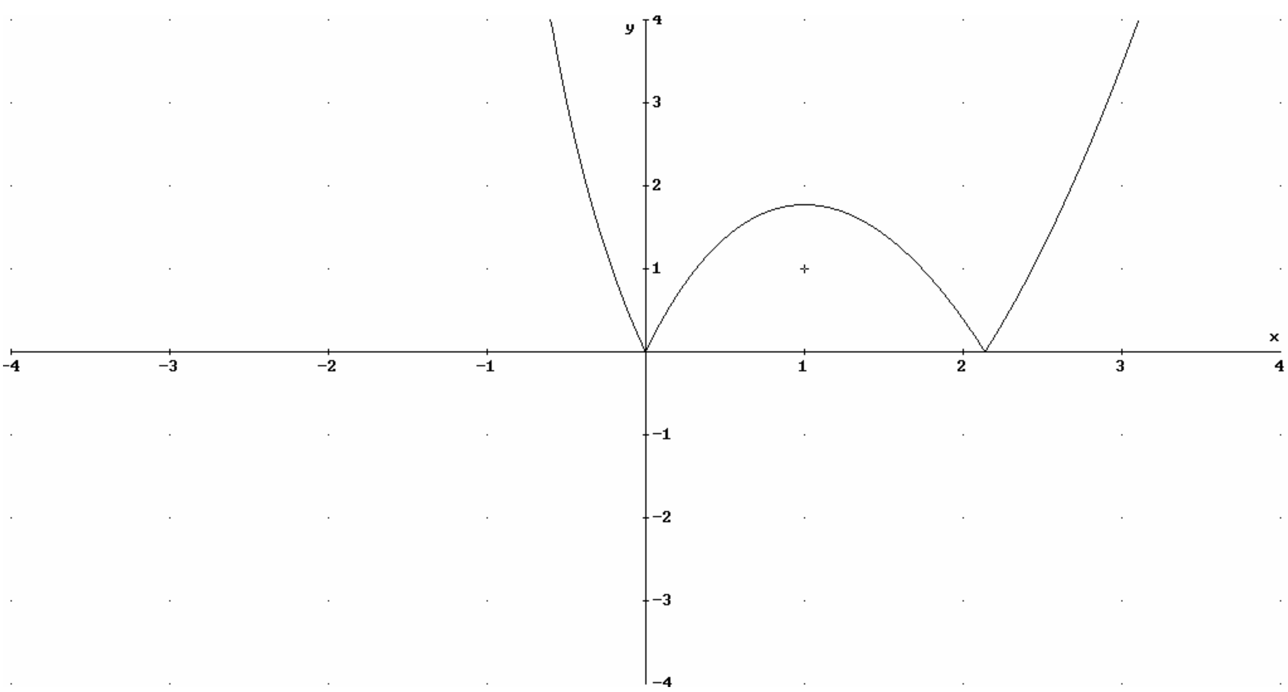
d) Si determini l'equazione della curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta y=y(1)

Considerando la simmetria assiale $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$ $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y(1) - y \end{cases}$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2(1 - \ln 16) - y = 2(\ln e - \ln 16) - y = 2\ln e/16 - y = \ln\sqrt{\frac{e}{16}} - y \end{cases}$$ da cui l'inversa

$\begin{cases} x = x' \\ y = \ln\sqrt{\frac{e}{16}} - y' \end{cases}$ e allora $\ln\sqrt{\frac{e}{16}} - y' = x'^2 - \ln(x'+1)$ $\quad y' = -x'^2 + \ln(x'+1) - \ln\sqrt{\frac{e}{16}}$

e) Si disegni per i valori di a e b trovati il grafico di $f(x) = \left|x^2 + a\log(x+b)\right|$



Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

PIANO NAZIONALE DI INFORMATICA

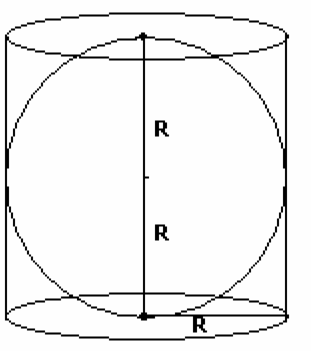
CORSO SPERIMENTALE

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Provare che una sfera è equivalente ai 2/3 del cilindro circoscritto.

Se la sfera è di raggio r. il raggio del cerchio di base è r el ‘altezza 2r.

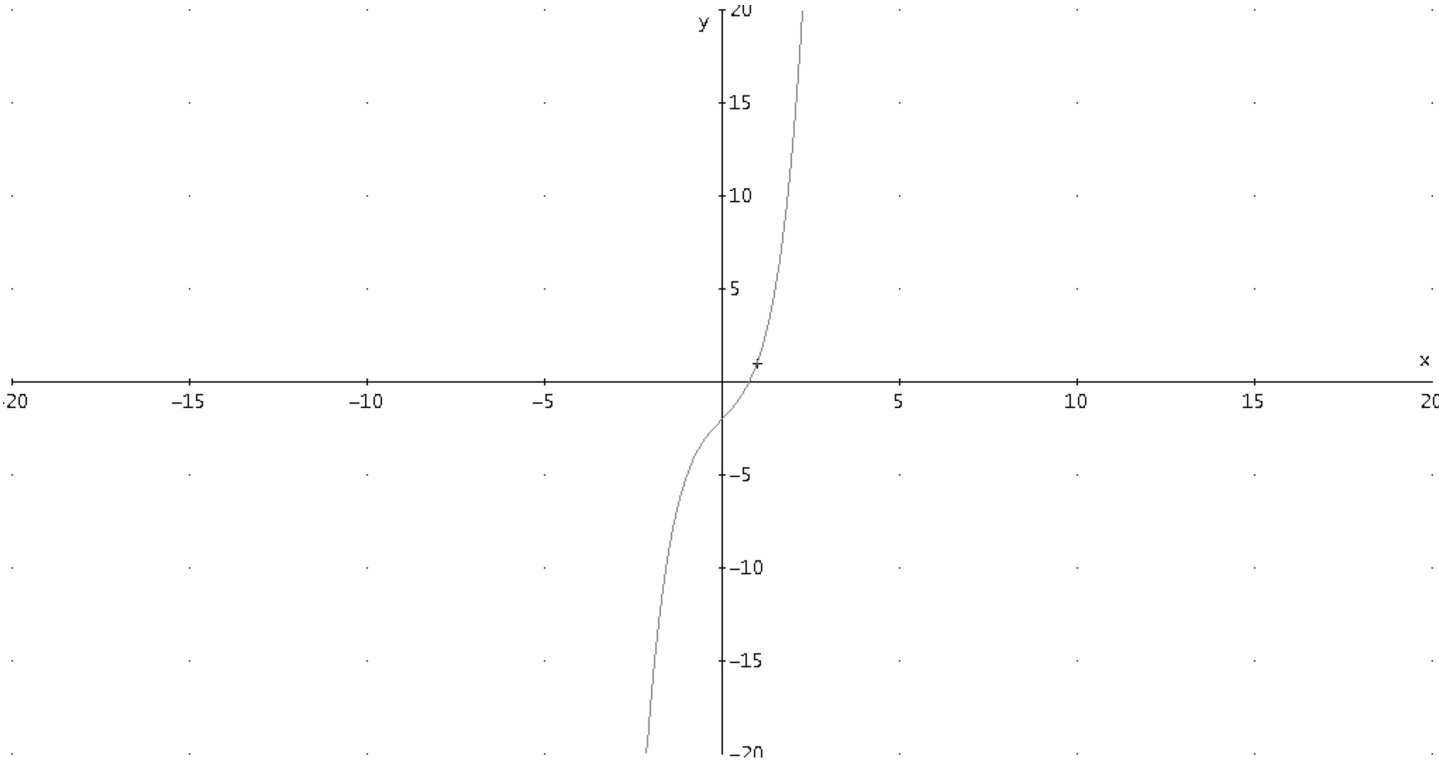


Allora $V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\left(\pi r^2\right)2r = \frac{2}{3}\left(A_{base}\right)h = \frac{2}{3}V_{cilindro}$

2. Determinare il numero delle soluzioni dell’equazione:

$$xe^x + xe^{-x} - 2 = 0$$
$$y = xe^x + xe^{-x} - 2$$
$$y' = xe^x + e^x + e^{-x} - xe^{-x} = e^x + e^{-x} \geq 0$$
$$\frac{e^{2x}+1}{e^x} \geq 0 \text{ sempre crescente.}$$
$$\lim_{x\to-\infty} xe^x + xe^{-x} - 2 = 0 - \infty = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} xe^x + xe^{-x} - 2 = 0 + \infty = +\infty$$

siccome è sempre crescente e va da meno infinito a più infinito, la soluzione è unica.



3. Dimostrare che se *p(x)* è un polinomio, allora tra due qualsiasi radici distinte di *p(x)* c'è una radice di $p'(x)$.

Se p(x) è un polinomio e se a e b sono due radici cioè p(a)=p(b) allora applicando il teorema di Rolle all'intervallo [a,b] ho che esiste un punto c per cui p'(x)=0

4. Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la *f(x)?*.

Poiché la derivata è sempre nulla per un corollario al teorema di Lagrange la funzione è costante.

5. Calcolare l'integrale

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \int \log x d \log x = \frac{\log^2 x}{2} + \cos t$$

6. Con uno dei metodi di quadratura studiati, si calcoli un'approssimazione dell'integrale definito

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -(-1-1) = 2$$

e si confronti il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale.

Usiamo il metodo dei rettangoli o dei trapezi.
Sia $a = 0$ e $b = \pi$ prendiamo 10 divisioni quindi n=10

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{10} = 0,314159265$$

x	f(x)
0	0
0,314159	0,309017
0,628319	0,587785
0,942478	0,809017
1,256637	0,951057
1,570796	1
1,884956	0,951057
2,199115	0,809017
2,513274	0,587785
2,827433	0,309017
3,141593	1,23E-16

s=	1,983524
S=	1,983524
Int=	0,991762

7. Verificato che l'equazione $x - e^{-x} = 0$ ammette una sola radice positiva compresa tra 0 e 1 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

$y = x - e^{-x}$ $y' = 1 + e^{-x} \geq 0$ Sempre positiva e quindi sempre crescente poiché

$f(0) = 0 - e^{-0} = -1$ $f(1) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = 0,63$ e quindi la funzione è sempre crescente in zero è negativa e in 1 è positiva allora la soluzione è unica e sta tra 0 e 1. allora tramite il metodo di bisezione abbiamo che:

Soluzione circa x=0,57

n	a	b	m	fa	fb	fm	fa*fm
0	0	1	0,5	-1	0,632121	-0,10653	0,106531
1	0,5	1	0,75	-0,10653	0,632121	0,277633	-0,02958
2	0,5	0,75	0,625	-0,10653	0,277633	0,089739	-0,00956
3	0,5	0,625	0,5625	-0,10653	0,089739	-0,00728	0,000776
4	0,5625	0,625	0,59375	-0,00728	0,089739	0,041498	-0,0003
5	0,5625	0,59375	0,578125	-0,00728	0,041498	0,017176	-0,00013
6	0,5625	0,578125	0,570313	-0,00728	0,017176	0,004964	-3,6E-05

8. Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?

$$P(E) = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{16}{3}} = \frac{\frac{12!}{9!3!}}{\frac{16!}{13!3!}} = \frac{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!}\ \cancel{3!}}}{\frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot \cancel{13!}}{\cancel{13!}\ \cancel{3!}}} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{16 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{11}{28} = 0,39$$

9. Spiegare il significato di *sistema assiomatico* con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria.

Quesito 9

Il tema richiede una trattazione piuttosto lunga e complessa. Un'esposizione in poche righe può essere la seguente.
In un **sistema assiomatico-**deduttivo, dimostrare un teorema significa verificare che esso discende logicamente da un **sistema di** proposizioni precedentemente dimostrate, le quali a loro volta devono discendere da altre proposizioni. E' evidente che questo procedimento deve necessariamente avere un punto **di** partenza. Devono quindi esserci un certo numero **di** proposizioni, dette postulati o assiomi, che devono essere accettate come vere e per le quali non si può richiedere una dimostrazione.
Gli assiomi possono essere scelti in modo arbitrario, devono però essere
• *compatibili*, cioè non si possono dedurre teoremi che se si contraddicono,
• *completi*, cioè dagli assiomi scelti si devono poter dedurre tutti i teoremi del **sistema**,
• *indipendenti*, cioè nessun assioma può essere dimostrato come conseguenza degli altri assiomi.
Nell'organizzazione logico-deduttiva che Euclide ha dato **alla** geometria nei suoi *Elementi* (300 a.C.), assiomi e postulati fanno **riferimento** a fatti intuitivamente evidenti o ad astrazioni **di** oggetti concreti.
L'assiomatica moderna, che nasce **con** il libro del 1889 *Fondamenti **di** Geometria* del matematico tedesco D. Hilbert, la geometria è strutturata come puro calcolo logico che opera su un **sistema di** assiomi, senza alcun **riferimento** al **significato** fisico-geometrico degli assiomi stessi.
All'organizzazione logica della matematica hanno contribuito in modo significativo anche G. Peano, G. Frege e B. Russell.

10. Dire, formalizzando la questione e utilizzando il teorema *del valor medio* o di *Lagrange*, se è vero che: «se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la *velocità media* è 60 km/h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60 km/h».

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ poiché il significato geometrico del teorema di lagrange afferma che esiste almeno un punto c della curva in a e b tale che direzione della tangente in c è uguale alla direzione della corda per f(b) e f(a). e dato che il un diagramma orario la corda rappresenta la velocità media nel tratto a e b e la tangente la velocità istantanea in c, allora per il teorema di Lagrange esiste un istante per cui l'automobile ha raggiungo il 60 Km/h.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione del vocabolario di italiano.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.