**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**
**a.s. 2002/2003**
**CORSO SPERIMENTALE**
**PNI e Progetto Brocca**
**SESSIONE SUPPLETIVA**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

**PROBLEMA 1.**
In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le parabole di equazione:

$$y = (a - 1)\, x^2 - 2\, a\, x + a^2 ,$$

dove a è un parametro reale diverso da 1.
**a)** Determinare quali tra esse hanno punti in comune con l'asse x e quali no.

$y=(a-1)x^2-2ax+a^2$ hanno punti in comuni tutte quelle parabole che hanno il delta maggiore o uguale a zero
$\Delta = a^2 - a^2(a-1) = 2a^2 - a^3 = a^2(2-a) \geq 0$ da cui $x \leq 2$
**b)** Trovare le due parabole che hanno il vertice in un punto di ascissa a.
$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2a}{2(a-1)} = \frac{a}{a-1} = a$ da cui $a = a(a-1)$ $a^2-2a=0$ da cui a=0 e a=2

**c)** Stabilire se le due parabole trovate sono congruenti o no, fornendo un'esauriente spiegazione della risposta.
Le due parabole $y=-x^2$ e $y=x^2-4x+4=(x-2)^2$ poichè esiste un isometria tale che trasforma una nell'altra per esempio $\begin{cases} Y=-y \\ X=x-2 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} Y=-y \\ X=-x+2 \end{cases}$ simmetria centrale di centro (1,0)

**d)** Scrivere l'equazione del luogo geometrico L dei vertici delle parabole assegnate e disegnarne l'andamento dopo averne determinato in particolare asintoti, estremi e flessi.

$$\begin{cases} y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4a^2-4a^2(a-1)}{4(a-1)} \\ x = -\frac{b}{2a} = \frac{a}{a-1} \end{cases}$$ da cui $$\begin{cases} y = \frac{a^3-2a^2}{a-1} \\ x = \frac{a}{a-1} \end{cases}$$ ricavando a dalla e sostituendo

$$\begin{cases} y = \frac{a^3-2a^2}{a-1} \\ a = \frac{x}{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\frac{x^2}{(x-1)^2}\left(\frac{x}{x-1}-2\right)}{\frac{x}{x-1}-1} = \dfrac{\frac{x^2}{(x-1)^2}\left(\frac{2-x}{x-1}\right)}{\frac{1}{x-1}} = \dfrac{x^2(2-x)}{(x-1)^2} \\ a = \frac{x}{x-1} \end{cases}$$ da cui

Luogo:

$$y=\frac{x^2(2-x)}{(x-1)^2}$$

C.E. $x\neq 1$ Positività $x\leq 2$ e nulla per x=0 . Passa per i punti A(0,0) e B(2,0)

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2(2-x)}{(x-1)^2}=\infty$ x=1 A.V. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2(2-x)}{(x-1)^2}=\infty$ No Asintoti orizzontali

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2(2-x)}{(x-1)^2}}{x}=-1=m$ e $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x^3}{x^2-2x+1}+x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-2x+1}=0=q$ Asintoto obliquo y=-x

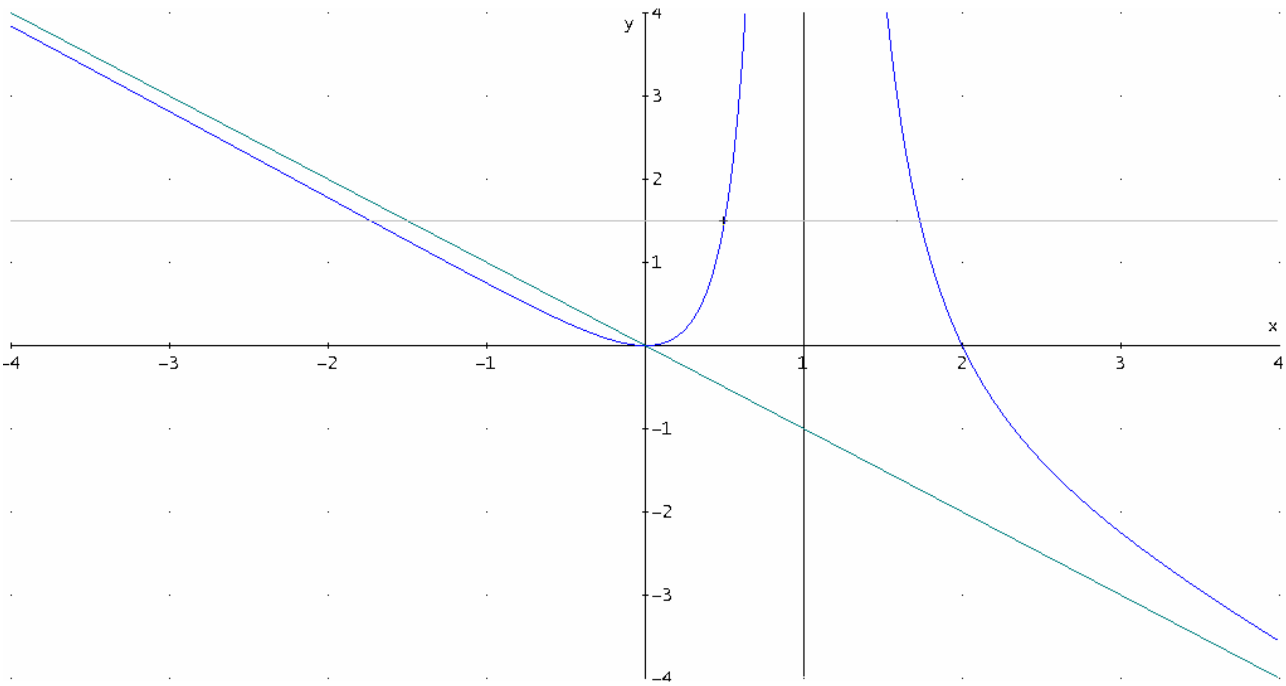
derivata

$$y'=\frac{(4x-3x^2)(x-1)^2-2(x-1)(2x^2-x^3)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)(-x^3-4x+3x^2)}{(x-1)^4}$$

$y'=\frac{x(x-1)(-x^2+3x-4)}{(x-1)^4}$ da cui $x\geq 0$ $x>1$ e sempre negativa da cui

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| - | + | + |
| - | - | + |
| - | - | - |
| ↘ | ↗ | ↘ |

$Min(0,0)$




**e)** Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva L e dalla retta di equazione y= $\frac{3}{2}$.

$\frac{x^2(2-x)}{(x-1)^2}=\frac{3}{2}$ da cui $2x^2(2-x)=3(x-1)^2$ da cui $4x^2-2x^3=3x^2-6x+3$ da cui

$2x^3-x^2-6x+3=0 \quad x^2(2x-1)-3(2x-1)=(2x-1)(x^2-3)=0$ da cui soluzioni

$x=\frac{1}{2} \vee x=-\sqrt{3} \vee x=\sqrt{3}$

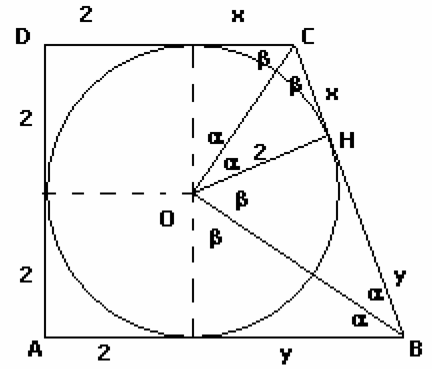
$$\int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{2x^2-x^3}{x^2-2x+1}-\frac{3}{2}dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{2x^2-x^3}{x^2-2x+1}-\frac{3}{2}dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}} -x+\frac{x}{(x-1)^2}-\frac{3}{2}dx$$

$$=-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x+\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}\Bigg|_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{array}{r|l} -x^3+2x^2+0x+0 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} x^3-2x^2+x & -x \\ \cline{1-1} x & \end{array}$$

**PROBLEMA 2.**

In un trapezio rettangolo ABCD, circoscritto ad un cerchio, AB è la base maggiore, CD la minore e BC il lato obliquo. Le misure, considerate rispetto alla stessa unità di misura, del raggio del cerchio e del perimetro del trapezio sono nell'ordine 2 e 18.




$P=2+2+2+2+x+x+y+y=8+2x+2y=18 \quad x+y=5$ e per il teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo OCB. Il triangolo è rettangolo poiché ogni tangente è perpendicolare al raggio (del cerchio inscritto) e perchè CO e OB bisecano gli angoli DCB e CBA. (Vedi figura)

Allora $xy=4$ da cui $\begin{cases} x+y=5 \\ y=\frac{4}{x} \end{cases}$ $\begin{cases} x+\frac{4}{x}=5 \\ y=\frac{4}{x} \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-5x+4=0 \\ y=\frac{4}{x} \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x=1 \vee x=4 \\ y=4 \vee y=1 \end{cases}$ e quindi x=1

y=4

**a)** Calcolare le misure dei lati del trapezio.

$DC=3 \quad DA=3 \quad AB=6 \quad CB=5$

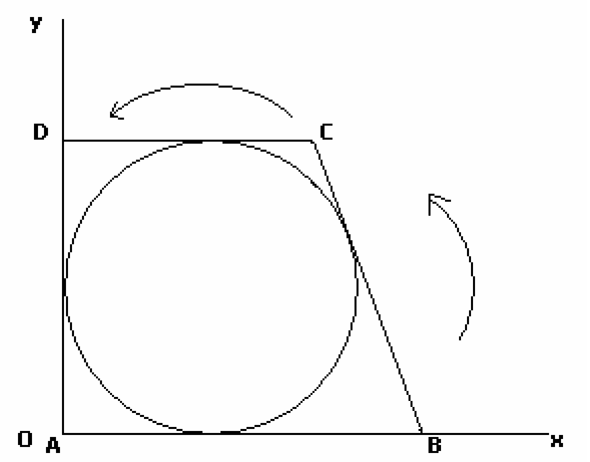
**b)** Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), scrivere le coordinate dei vertici del trapezio.

**c)** Tra le centro-affinità di equazioni:

x' = a x + b y ,     y' = c x + d y ,

trovare quella che trasforma il vertice B del trapezio nel vertice C e il vertice C nel vertice D.

$A(0,0)$ $B(6,0)$ D(0,4) C(3,4)




$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ B in C $\begin{cases} 3 = a6 + b0 \\ 4 = c6 + d0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ c = \frac{2}{3} \end{cases}$

C in D $\begin{cases} 0 = a3 + b4 \\ 4 = c3 + d4 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 = \frac{1}{2}3 + b4 \\ 4 = \frac{2}{3}3 + d4 \end{cases}$ $\begin{cases} b = -\frac{3}{8} \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}y \\ y' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$ punti uniti $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}y \\ y' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$ $\begin{cases} 4x = -3y \\ 3y = 4x \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ punti uniti

troviamo l'inversa $\begin{cases} 2x' = 4x - y \\ 6y' = 4x + 3y \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x = x' + \frac{3}{4}y' \\ y = -\frac{4}{3}x' + y' \end{cases}$

la retta y=mx+q deve trasformarsi in y'=mx'+q

$\left(-\frac{4}{3}x' + y'\right) = \left(x' + \frac{3}{4}y'\right)m + q$ da cui $(-16x' + 12y') = (12x' + 9y')m + 12q$

$(12 - 9m)y' = (12m + 16)x' + 12q$ da cui $y' = \frac{12m + 16}{12 - 9m}x' + \frac{12}{12 - 9m}q$

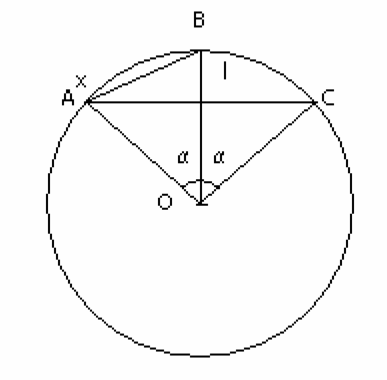
$\frac{12m + 16}{12 - 9m} = m$ $\frac{12m + 16}{12 - 9m} = m$
$\frac{12}{12 - 9m}q = q$ $\frac{12}{12 - 9m}q = q$ $\begin{cases} 12m + 16 = 12m - 9m^2 \\ 12q = q12 - 9mq \end{cases}$ $\begin{cases} 12m + 16 = 12m - 9m^2 \\ 12q = q12 - 9mq \end{cases}$ da cui

$\begin{cases} 9m^2 + 16 = 0 \\ qm = 0 \end{cases}$ m=0 o q=0 non soddisfano la prima equazione e quindi non ha rette unite.

**d)** Stabilire se la centro-affinità trovata presenta rette unite.
**e)** Calcolare l'area della figura trasformata del cerchio inscritto nel trapezio in base alla centro-affinità trovata sopra.

Considerando che se S e S' sono le aree di due figure di cui una è la trasformata dell'altra econsiderando che detA è il determinate della trasformata si ha che $\frac{S'}{S} = \det A$ .SE $\det A = \left| \frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\left(-\frac{2}{3}\right) \right| = \frac{1}{2}$ allora l'area della trasformata del cerchio diventa $S' = \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}4\pi = 2\pi$

**QUESTIONARIO**
**1)** Nota la lunghezza di una corda di un cerchio di dato raggio, calcolare quella della corda sottesa dall'angolo al centro uguale alla metà di quello che sottende la corda data.
[Nota – La risoluzione del problema è stata usata da Tolomeo, II sec. d.C., per la costruzione di una tavola trigonometrica in maniera equivalente alla nostra formula di bisezione del seno.]




Secondo il teorema della corda abbiamo che $AC = l = 2R\sin\alpha$

$$x = AB = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = 2R\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} = 2R\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}} = 2R\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\frac{l^2}{4R^2}}}{2}}$$

$$x = AB = 2R\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\frac{l^2}{4R^2}}}{2}} = 2R\sqrt{\frac{2R-\sqrt{4R^2-l^2}}{4R}} = R\sqrt{\frac{2R-\sqrt{4R^2-l^2}}{R}}$$

**2)** Nello spazio ordinario sono dati due piani α , β ed una retta r. Si sa che r è parallela ad α e perpendicolare a β . Cosa si può concludere circa la posizione reciproca di α e β ? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
Sicuramente α e β non sono paralleli altrimenti, per la proprietà transitiva del parallelismo avrei che r è parallela con β il che è assurdo . Se $t = \alpha \cap \beta$ e se faccio passare piano γ per r e se chiamo
s la retta intersezione con α e z la retta intersezione con α e β ho che per r è perpendicolare con z per ipotesi, e dato che r e s sono paralleli , z è perpendicolare con s e quindi α e β sono perpendicolari. (teorema delle tre perpendicolari ).

**3)** Il dominio della funzione f(x) = $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 2x}}$ è l'insieme degli x reali tali che:
A) x≤ 0 e/o x>2; B) x≤ 0 e/o x≥ 2; C) x=0 e/o x>2; D) x=0 e/o x≥ 2.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

La risposta è la D. poiché il C.E. $\begin{cases} x^2-2x\geq 0 \\ x-\sqrt{x^2-2x}\geq 0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x^2-2x\geq 0 \\ \sqrt{x^2-2x}\leq x \end{cases}$ e $\begin{cases} x^2-2x\geq 0 \\ x\geq 0 \\ x^2-2x\leq x^2 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-2x\geq 0 \\ x\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases}$ da cui soluzione $x=0\vee x\geq 2$

**4)** Si consideri un polinomio di grado n≥ 2 nella variabile reale x con coefficienti reali. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché esso ammetta due zeri uguali al numero reale $\alpha$ è che il valore del polinomio e quello della sua derivata prima si annullino per $x=\alpha$ .

Se i polinomio ammette due zeri coincidenti allora è divisibile per il $(x-\alpha)^2$ (Teorema di Ruffini)

Quindi il teorema dice che $P^n(x)=(x-\alpha)^2P^{n-2}(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases} P^n(\alpha)=0 \\ P^{'n}(\alpha)=0 \end{cases}$ Dove $P^n(x)$ è un polinomio di grado n.

Se Il polinomio ammette due zeri coincidenti allora considerando che la derivata è $P^{'n}(x)=2(x-\alpha)P^{n-2}(x)+(x-\alpha)^2P^{'n-2}(x)$ sicuramente $x=\alpha$ è soluzione del polinomio e della derivata. Viceversa se $P^n(\alpha)=0$ allora si ha che $P^n(x)=(x-\alpha)P^{n-1}(x)$ da cui la derivata $P^{'n}(x)=(x-\alpha)P^{'n-1}(x)+P^{n-1}(x)$ si annula per $x=\alpha$ solo se $P^{n-1}(\alpha)=0$ e quindi le soluzioni diventano due e coincidenti.

**5)** Stabilire se esistono i limiti della funzione f(x) = $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ per:

a) $x\to+\infty$ ; b) $x\to-\infty$ ; c) $x\to 0$ ,

e, in caso di risposta affermativa, determinarli.

Dato $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$ il campo di esistenza diventa x>-1 con x diverso da 0.

Esistono solo i limiti a) $\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{\frac{\infty}{\infty}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x+1}}=1$ c) $\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{\frac{0}{0}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x+1}}=e$

**6)** Si consideri il seguente sistema di equazioni nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} kx+y+z=0 \\ x+ky+z=0 \\ x+y+kz=0 \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.

Dire se l'affermazione: «il sistema ammette la sola soluzione x=0, y=0, z=0 per ogni valore di k diverso da 1» è vera o falsa e fornire una spiegazione esauriente della risposta.

Per il teorema di Cramer se il detA è diverso da zero ammette una ed una sola soluzione.

Calcolando il determinate secondo la regola di Sarrus abbiamo che $\det A=\left|\begin{matrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{matrix}\right|\begin{matrix} k & 1 \\ 1 & k \\ 1 & 1 \end{matrix}$

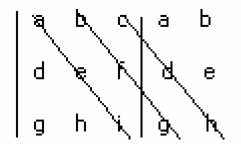
Si ha che $\det A=\left|\begin{matrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{matrix}\right|\begin{matrix} k & 1 \\ 1 & k \\ 1 & 1 \end{matrix}=(k^3+1+1)-(k+k+k)=k^3-3k+2$

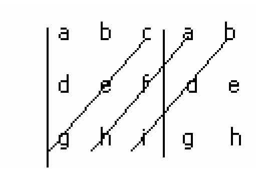
$\det A=k^3-3k+2=(k-1)^2(k+2)$ E' falsa poiché per k=-2 il sistema ammette soluzioni diverse.

Ricordiamo la regola di Sarrus su un determinate 3x3:

$\det A=\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|$ si riscrivono le prime due righe di seguito $\det A=\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$

e si considerano somma del prodotto delle diagonali principali S=(aei)+(bfg)+(cdh)




meno la somma delle prodotto delle diagonali secondarie
D=(ceg)+(afh)+(bdi) e allora
il determinate diventa detA= S=(aei)+(bfg)+(cdh)-(ceg)-(afh)-(bdi)

**7)** Utilizzando il procedimento preferito, dimostrare la formula che fornisce l'area della regione piana racchiusa da un'ellisse di semiassi noti. Considerando l'ellisse generale $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ed esplicitando la y $\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$ $\quad y^2=b^2\frac{a^2-x^2}{a^2}$ $\quad y=\pm\sqrt{b^2\frac{a^2-x^2}{a^2}}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ . Allora l'area si calcola come il doppio dell'area racchiusa dalla funzione superiore (+)

$Area=2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=4\frac{b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$ considerando gli integrali notevoli

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}\Big|_0^a=\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{a}{a}=\frac{\pi}{2}\frac{a^2}{2}$$

abbiamo che $Area=4\frac{b}{a}\pi\frac{a^2}{4}=\pi ab$

**8)** In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) sono date le affinità di equazioni:

x' = (a+1) x – b y + a , y' = (a–1) x + 2 b y – 1 ,

dove a, b sono parametri reali.
Dimostrare che fra esse vi è una similitudine diretta e di questa trovare il punto unito.

$$\begin{cases} x' = (a+1)x - by + a \\ y' = (a-1)x + 2by - 1 \end{cases}$$ da cui

Per essere una similitudine deve essere

Ricordiamo che una similitudine diretta è del tipo $\begin{cases} x' = ax - by + p \\ y' = bx + ay + q \end{cases}$ e che il rapporto di similitudine è dato da $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ allora

$$\begin{cases} a+1 = 2b \\ a-1 = b \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} a-2b = -1 \\ a+b = 1 \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 4x - 2y + 3 \\ y' = 2x + 4y - 1 \end{cases}$$

il punto unito è $\begin{cases} x = 4x - 2y + 3 \\ y = 2x + 4y - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = -3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{7}{13} \\ y = \dfrac{9}{13} \end{cases}$

**9)** Un'urna contiene 30 palline uguali in tutto e per tutto fuorché nel colore: infatti 18 sono bianche e 12 nere. Vengono estratte a caso, una dopo l'altra, due palline. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca sapendo che la prima:

a) è bianca e viene rimessa nell'urna?
b) è bianca e non viene rimessa nell'urna?
c) è messa da parte senza guardarne il colore?

a) $P(E) = \dfrac{18}{30} = 0,6$

b) $P(E) = \dfrac{17}{29} = 0,58$

c) $P(E) = \dfrac{18}{30}\dfrac{17}{29} + \dfrac{12}{30}\dfrac{18}{29} = 0,6$

**10)** Considerata l'equazione in x:

$$a x^2 + b x + c = 0 ,$$

dove a, b, c sono numeri reali qualsiasi, con a≠ 0, scrivere un algoritmo che ne determini le soluzioni reali e le comunichi, esaminando tutti i casi possibili.

Se $a = 0$ allora $x = -\dfrac{b}{c}$

Altrimenti

Se $a \neq 0$

Se $\Delta < 0$ allora n.s.

e $\Delta \geq 0$ allora $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$